中、美历届数学竞赛试题精解

刘鸿坤　曾　容　李大元　等编

上海科学技术出版社

中、英历届数学竞赛试题精解

刘鸿坤
曾　容　等编
李大元

责任编辑　钱锡鸿

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海视榕印刷厂印刷

开本787×1092　1/16　印张　15　字数 262,000
1987年3月第1版　1987年3月第1次印刷
印数：1—42,201

统一书号：13119 1431　定价：1.65元

前　言

根据当前中学数学教学的形势和"三个面向"的要求，上海市数学会在总结几年来国内外数学竞赛实践的基础上，在今年三月间组织了部分教师，收集了自1981年以来的全国、上海和美国数学竞赛试题，并将解答作了认真整理和补充，汇编成这本《中、美历届数学竞赛试题精解》.

本书的主要对象是学有余力、对学习数学有一定兴趣和爱好的中学生，数学课余小组的参加者和指导者，也可供数学教师选编补充题时研究参考.

数学课余活动的开展应该是学校课堂教学的延伸和拓广，应该成为学校数学教学因材施教的一个重要组成部分. 数学课余活动小组为数学竞赛输送人才，而数学竞赛是发现人才，培养人才的有效的教育手段. 以课堂教学为主，适当开展课余活动和数学竞赛，是开阔思路，发展思维，提高能力，培养人才的有效途径. 它有利于中学的数学教学，促进中学数学改革.

我们希望《中、美历届数学竞赛试题精解》的出版能对中学数学质量的提高和数学课余小组活动的开展，起着积极的推动作用. 为此，我们谨向参加本书编写工作的上海市数学会中学教育委员会，部分大、中学校和教育学院的老师，提供资料的有关同志，表示衷心的感谢.

试题的解答仅供读者参考. 从编写到出版，时间十分仓促，又限于编者水平，不免有不妥或错误之处，殷切地希望专家和读者批评指正.

上海市数学会

一九八六年八月

目　录

美国中学生数学竞赛概况

在美国，大中学生中间进行定期的数学竞赛的传统几乎有五六十年历史了，迄今为止，美国的中学生数学竞赛有：美国中学数学竞赛(AHSME)，美国数学邀请赛(AIME)，美国数学奥林匹克(USAMO)和美国初中数学竞赛(AJHSME)。

1．美国中学数学竞赛 在1950年，美国数学协会首次举行中学生数学竞赛，它的参加对象仅仅限于纽约近郊地区．在1957年，这样的数学竞赛开始发展为全国性的竞赛，并由美国数学协会和保险统计员协会等联合举办．1960年参加竞赛的学生来自5200所学校．这种竞赛几乎在美国的每个州和加拿大的每个人口稠密的省份都进行．现在，美国的这种数学竞赛，实际上已是一个国际性的比赛，参加者除了美国之外，还有加拿大、英国、爱尔兰、澳大利亚、卢森堡、比利时、匈牙利、意大利、波多黎各、牙买加等．在1985年，参加这种竞赛的学生超过380000，他们分别来自各个国家和地区的5917所学校．

美国中学数学竞赛的试题范围完全以标准的中学课程为基础．它是面向中学的几种不同水平的学生，而不是只面向高能力的学生．

美国中学数学竞赛中的试题全部采用选择题的形式．题目由美国数学协会选定、印刷，然后邮寄到各校．考题的第一、二部分，针对学生掌握概念的程度，考查了学生有关的基本知识和基本技能，而第三、四部分，则超越了学校教学大纲的要求，考查一些具有探索性、提高性的问题．从1974年起，竞赛的考题是30道选择题，并规定在90分钟内完成．每题给出5个供选择的答案，其中有一个且仅有一个是正确的．

在1985年之前，评分方法是每人先有30分的底数，然后，每答对一题得4分，每答错一题扣1分，未回答的题既不得分也不失分．若全对者，则加120分，得满分150分．在1986年中，采用新的评分方法：每一题答对者得5分，不答者得2分，答错者得0分，满分仍为150分．

竞赛结束后，各学校按考试分数分别评定名次，并由美国数学协会统一掌管光荣册的登记工作．成绩大于或等于100分的学生，都可载入光荣册．光荣册不仅是学生的一种荣誉，也是大学录取该学生的重要依据，大学数学专业可根据光荣册选录学生．

自1983年起，我国北京和上海都参加了这项国际的数学竞赛(1986年开始，天津市也正式参加)．在1983年3月1日举行的第34届美国中学数学竞赛中，上海赛区有8所中学的79名高中生参加．上海市建设中学的车晓东同学获得满分(本届获得满分者有两名，其中美国一名)．在1984年2月28日举行的第35届竞赛中，上海市有8所中学的117名学生参加．上海市复旦大学附中的袁勇杰同学获得满分(本届获得满分者有四名，其中北京赛区二名，美国一名)．在1985年2月26日，上海市有14所中学的131名学生参加第36届美国中学数学竞赛．竞赛结果，复旦大学附中孙晓伟同学获得145分；复旦大学附中陈洪奕(高二)、向明中学吴思皓(高二)、格致中学茅征宇(高二)均获得140分；行知中学张志云同学获得136分．此外，7名获得130分；11名获得125分．在131名考生中，考分不小于

95分者有109名。在这届中,获得满分者有三名,美国一名,英国二名。上海复旦大学附中以420分(即该校最高分的三名考生的得分之和)的优异成绩而荣获学校优胜者称号,并载入光荣册。而美国荣获学校优胜者的前5名的成绩分别是:370,366,357,355,355。

在1986年2月25日举行的第37届美国中学数学竞赛中,上海赛区有20所中学的162名学生参加。竞赛结果,有1名获得145分;1名获得144分;8名获得140分。此外,获得130~139分有38名。在162名学生中,考分不小于100分的有154名。他们将被邀请参加3月18日举行的第4届美国数学邀请赛。

2. 美国数学邀请赛　在1982年前,美国中学数学竞赛是作为美国数学奥林匹克的资格赛。通过中学数学竞赛,选出100名左右选手参加美国数学奥林匹克。然后,再从中选出参加当年7月举行的国际数学奥林匹克的选手。

采用选择题的命题方式,虽然有很多优点,但也有局限性,为了更全面、更准确地培养和考察学生,于是,在美国中学数学竞赛和美国数学奥林匹克这两者之间,产生了美国数学邀请赛。这样,美国数学邀请赛就成为参加美国数学奥林匹克的资格赛。

在1983年3月22日举行了第一届美国数学邀请赛。凡是在美国中学数学竞赛中,得分高于或等于95分的学生均被邀请参加这种竞赛。在1986年,又有新的规定:凡在第37届美国中学数学竞赛中,得分高于或等于100分者将被邀请参加第四届美国数学邀请赛。

美国数学邀请赛的试题由美国数学协会命题,共15道填充题,每题1分,满分为15分。每题的答案均为不超过999的正整数,要求应试者在2.5小时内完成(从1985年起,考试时间改为3小时)。邀请赛的试题,新颖别致,内容广泛,其中有些题目具有较高的灵活性和抽象性。要求学生具有一定的逻辑思维、推理论证、空间想象和分析问题解决问题的能力。

在第一届美国数学邀请赛中,上海市有76名学生参加。竞赛结果,上海市建设中学车晓东同学和华东师范大学二附中王菁同学均获满分;有2名获得13分,3名获得12分,8名获得11分,13名获得10分。在1984年3月20日,上海市有110名学生参加了第二届美国数学邀请赛。有3名获得13分,13名获得12分,14名获得11分,18名获得10分。在1985年3月19日,上海市有109名学生参加了第三届美国数学邀请赛。竞赛结果,上海市向明中学高二学生吴思皓获得15分。此外,有4名获得14分,5名获得13分,7名获得12分,18名获得11分。在这届邀请赛中,有各个国家和地区的625所中学的932名学生参加(第二届是349所中学的623名学生)。竞赛结果,平均数是5.8分,中位数是6分。凡是得分大于或等于8分的学生将取得公认的AIME证书。

在1986年3月18日,上海市有154名学生参加了第四届美国数学邀请赛。上海市大同中学张浩同学、上海中学丘隆东女同学、向明中学吴思皓同学和光明中学郭峰同学均获满分,有10名获得14分,11名获得13分,22名获得12分,20名获得11分。

3. 美国数学奥林匹克　自1972年起,到1985年5月为止已经举行了14届。在1983年以后,凡是在美国数学邀请赛中,得分大于或等于8分的学生将被邀请参加这种竞赛。美国数学奥林匹克是美国国内水平最高的,并且在国际上有着一定影响的数学比赛。每次竞赛的试题有5道,要求在3.5小时内完成。在1985年,经第三届美国数学邀请赛后,有62所中学的64名学生取得参加当年4月23日举行的第14届美国数学奥林匹克的资格。

5月2日在林肯进行USAMO的评分工作。6月3日和4日,在美国首都华盛顿举行授奖仪式,对前8名优胜者授予荣誉称号,8名优胜者的父母也被邀请参加。接着,从6月

5日至27日，在西点美国陆军军官学校，对24名学生进行三个星期的数学奥林匹克训练。最后，从中选出6名学生作为美国国家队成员，参加7月1日至10日在芬兰赫尔辛基举行的第26届国际数学奥林匹克(IMO)。

4. 美国初中数学竞赛 1985年12月10日举行了第一届美国初中数学竞赛。它是由美国数学协会等六个单位联合举办的。参加的对象是7年级和8年级的学生。命题范围是这二个年级的数学课程包含的若干课题(但不包括极限)，如：算术中的整数，分数，小数；比和比例；数论；简单的几何，周长，面积，体积；概率与统计；逻辑推理。竞赛试题是25道选择题，并规定在40分钟内完成。对随机猜测答案不予惩罚。这届竞赛有美国、加拿大等国家和地区的15万学生参加。

几年来，数学竞赛的实践说明，它是有助于中学数学教育的改革，有利于中学数学教学质量的提高，有利于发现人才和培养人才，为加强"双基"，培养能力，发展智力起着积极作用。但根据我国当前的中学数学教学来看，要使学有余力，成绩优秀的中学生的水平与国际数学竞赛的要求日趋吻合，在训练的内容上，我们还要加强以下几个方面：

(1) 初等数论的知识　包括数的整除性；最大公因数与最小公倍数；素数与素因子唯一分解定理；同余式的概念与性质；简单的不定方程的解法。

(2) 多项式与方程论初步　包括多项式的整除性；因式分解；代数基本定理的应用；n次多项式的根与系数的关系(韦达公式)等。

(3) 不等式的证明　包括用一些常见的、著名的不等式，如算术平均，几何平均，调和平均和幂平均不等式；柯西-许瓦茨不等式来解题。

(4) 组合数学的基本概念和原理　如抽屉原则；包含与排斥原理；图论中的一些基本知识等。

(5) 数学归纳法的灵活运用(其中包括有关递归函数的问题)。

上述内容有的已纳入现行中学教材中。我们还可以通过第二课堂或课外活动，以讲座或其他形式介绍一些课本以外的知识，扩大知识面，开拓学生的眼界。此外，为了提高学生的解题能力，还可以讲一些常用的解题方法，或对学生的解题思路和方法进行讨论与讲评。

关于选择题及其解法探讨

数学选择题的出现和盛行是与现代科学技术发展的进程密切相关的。尤其，随着计算机的应用日益广泛，对中学数学教育领域、生产和科技人员的能力要求也在改变，从而导致对选择、估计、判断、逻辑推理能力等方面的要求的提高，在国外的标准化考试中几乎全部采用此种题型，在一定程度上正是反映了这种对能力要求侧重点的改变。

从1980年起，选择题在我国应运而生。本文就选择题的类型、特点、解法、评价作如下的探讨。

选择题的类型

选择题的题型可分成最佳选择题（它的基本模式是在每个题目下有四个或者五个备选择的答案，其中有一个且只有一个答案是正确的），配位选择题（题目的前提与备选择答案两者数目可相等也可不相等，要求从中找出两者之间的对应关系），组合选择题（由先提出问题，再列出四个备选择答案，然后将它们加以组合成五组，用 $A \sim E$ 五个字母表示，最后选用一个字母作为答案），多答案选择题（正确答案可不止一个，也可能是全部）。目前，国内外最常用的选择题的题型是最佳选择题。在应用过程中，它又引伸出两种情形：

1．在备选择的答案中可以不列出正确的答案，而将“不同于$(A) \sim (D)$的答案”或者“不唯一确定”作为正确答案；也可以列出正确的答案，而将“不同于$(A) \sim (D)$的答案”或者“不唯一确定”作为迷惑性或干扰性的答案。如：

［例1］ 在坐标平面内选择一点(x, y)，使得它到x轴，y轴和直线$x+y=2$的距离都相等。则x是

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) 1 (E) 不唯一确定。

［例2］ 随机地从$\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$中取出6个不同的整数，在所取的数中，第二最小的数是3的概率是

(A) $\frac{1}{60}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 不同于$(A) \sim (D)$的答案。

2．正确答案是以“否定”的要求作为选择。如：

［例3］ 设S是这样的命题：“若数n的各位数字之和能被6除尽，则n能被6除尽”。使命题S不成立的n的一个值是

(A) 30 (B) 33 (C) 40 (D) 42 (E) 不同于$(A) \sim (D)$的答案。

一般说来，如果在命题中出现上述的情况，那么将会提高题目的难度，增设学生选择的关卡，同时对学生的随机猜测也是一种制约。

选择题的特点

选择题考查的重点，在于最基本的知识与技能，有的偏重于基本概念，有的需要一定的推理、论证，有的则需要作一些计算。选择题的特点是：全面、准确、灵活、快速。

1. 全面——由于题目小，数量多，具有一定的覆盖面。这样，可以全面地测试学生对所学的各种基本知识、技能掌握的情况。

2. 准确——选择题的备选择答案是精心设计的。它们或是相近的概念，或是相似的形式，或是易犯的典型错误。倘若学生在概念，基本知识的理解上模棱两可，不完整，不准确，就会选择错误的结果。

3. 灵活——选择题的结构同常规题有所不同，因此解题的思想方法也有所不同。选择题涉及到的知识，一般都是若干个最基本内容的组合。这就要求学生具有一定的技巧和灵活运用基础知识，分析解题途径的能力。

4. 快速——由于选择题容量大，时间紧。因此不可能将每道选择题都作为常规题来解，然后将结果与备选择答案逐一比较作出判断。所以要求学生能以较优的方法，迅速作出正确的判断。

选择题的解法

根据选择题的特点和要求，只要能找到方法，判定结果即可，并不要求掌握所涉及的全部内容，对不同的选择题，判定的方法也有所不同。但要充分地利用题目所提供的信息。例如，美国中学数学竞赛试题，在每题所给出的(A)～(E)五个备选择答案中，"有一个且只有一个答案是正确的"。这就告诉我们：第一，如果能一眼判定某个答案正确，那么可不及其余。第二，如果要直接肯定备选择答案的正确性有困难，那么只要正确地否定五个备选择答案中的四个，即可判定剩下的一个备选择答案必定正确，即使对它的正确性一无所知也无妨。第三，如果由某个备选择答案(A)正确，能推出另一个备选择答案(C)也正确，那么(A)一定是错的，否则就会出现两个以上的正确答案，与题设矛盾。

以上三点也就是解选择题的基本思想。根据这个基本思想可以引出如下几种解选择题的方法。

1. 通过排除较易判定的错误答案，缩小其选择范围，然后从中求得正确答案。

[例1] x, y 为两个正数，$x:y=a:b$，其中 $0<a<b$。如果 $x+y=c$，则 x 与 y 中较小的一个为

(A) $\frac{ac}{b}$ (B) $\frac{bc-ac}{b}$ (c) $\frac{ac}{a+b}$ (D) $\frac{bc}{a+b}$ (E) $\frac{ac}{b-a}$.

[解] 根据题设，备选择答案中必定含有 $a+b$ 及 c 的因子。由此可见(A)、(B)、(E)都不正确。然后在(C)和(D)中，由 $0<a<b$，得(D)不正确。故(C)正确。

2. 利用满足条件的特定值，来检验备选择答案正确与否。

[例2] 设 $0<a<1$，若 $x_1=a$，$x_2=a^{x_1}$，$x_3=a^{x_2}$，…，$x_n=a^{x_{n-1}}$，…，则数列$\{x_n\}$

(A) 是递增的 (B) 是递减的 (C) 奇数项是递增的，偶数项是递减的 (D) 偶数

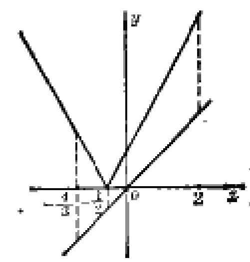
项是递增的，奇数项是递减的。

［解］ 设 $a=\frac{1}{2}$，则 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

∴ $x_2>x_1$，得(B)不正确。

又 $x_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$0<\frac{1}{2}<1$，∴ $x_1<x_3$，$x_3<x_2$，得(A)、(D)都不正确，故(C)正确。

3．利用函数图象及其性质，或者通过几何作图判定正确的答案。



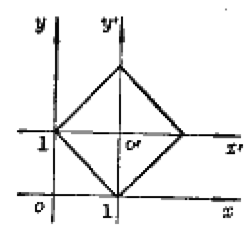
［例 3］ 方程 $|x-|2x+1||=3$ 的不同的根的个数是

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4。

［解］ 令 $y=x$ 和 $y=|2x+1|$，如图所示。则原方程解的意义就是：求这样的 x，它满足 $y=x$ 和 $y=|2x+1|$ 图象间的铅垂距离等于 3。后者的图象呈"V"字形状，它的顶点坐标是 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，斜率是 ±2。

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，图象间的铅垂距离是 $\frac{1}{2}$。当 x 从 $x=-\frac{1}{2}$ 向右或向左连续增加时，图象间的铅垂距离相应增加，因此，恰好有 2 个 x 值满足原方程，所以(C)正确。

4．通过代换化繁为简，或者转化为特殊的、熟知的性质和图象，从而作出判断。



［例 4］ 由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成图形的面积是

(A) 1 (B) 2 (C) π (D) 4。

［解］ 利用坐标轴平移：

$$\begin{cases}x'=x-1,\\ y'=y-1.\end{cases}$$

得 $|x'|+|y'|=1$。根据方程具有的对称性，因此图形更易作出(如图)。由于经坐标平移后不改变图形的面积，从而得知(B)正确。

［例 5］ 联立方程

$$2y=x+\frac{17}{x},\ 2z=y+\frac{17}{y},\ 2w=z+\frac{17}{z},\ 2x=w+\frac{17}{w}$$

的实数解(x, y, z, w)的组数是

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16。

［解］ 对于任何正数 a，有不等式 $\frac{1}{2}\left(a+\frac{17}{a}\right)\geqslant\sqrt{17}$，当且仅当 $a=\frac{17}{a}$，即 $a=\sqrt{17}$ 时等号成立。

如果 $x>0$，则依次考察给出的每个方程，得

$$y\geqslant\sqrt{17},\ z\geqslant\sqrt{17},\ w\geqslant\sqrt{17},\ x\geqslant\sqrt{17}.$$

假设 $x>\sqrt{17}$，则

$$y-\sqrt{17}=\frac{x^2+17}{2x}-\sqrt{17}=\left(\frac{x-\sqrt{17}}{2x}\right)(x-\sqrt{17})<\frac{1}{2}(x-\sqrt{17}),$$

因此 $x>y$。同样地，$y>z$，$z>w$，$w>x$，从而得 $x>x$，显然矛盾。所以 $x=y=z=w=\sqrt{17}$，它是联立方程的一组解，且是 $x>0$ 时的仅有一组解，记作(x, y, z, w)。

当且仅当$(-x, -y, -z, -w)$是$x<0$时的一组解，于是$x=y=z=w=-\sqrt{17}$是联立方程仅有的另一组解，故(B)正确。

5．利用逻辑推理方法，直接判定正确的答案。

［例 6］ 预定在公园的空地上举行一个集会，并为此定了一个帐篷．如果下雨的机会是50%，又不管是否下雨，在集会时不能如期收到帐篷的机会也是50%．在下列说法中哪一个是对赴会者淋雨的机会的最好叙述（假定帐篷如期运到，他们都不会淋雨）？

(A) 必然要淋雨 (B) 淋雨的机会是$\frac{3}{4}$ (C) 淋雨和不淋雨的机会是相等的 (D) 淋雨的机会是$\frac{1}{4}$ (E) 必然不会淋雨。

［解］ 根据下雨和晴的机会相等，以及如期收到和不能如期收到帐篷的机会相等，则有如下情况：

- 天气
  - 下雨
    - 若如期收到帐篷，则不淋雨。
    - 若不能如期收到帐篷，则淋雨。
  - 晴
    - 若如期收到帐篷，则不淋雨。
    - 若不能如期收到帐篷，则不淋雨。

由此可见，淋雨的机会是$\frac{1}{4}$，所以(D)正确。

以上仅仅是选择题的几种常用解法．评价某种解法是否优化，其标准就是：快速、准确。因此，为了达到上述要求，有时在解题过程中往往几种方法交错使用。

此外，有人认为解选择题可用猜答案的办法来解．当然，有些选择题由于其本身或者备选择答案设计不够理想，学生可以猜答案，这是应该尽量加以避免的．但对猜答案的情况有必要加以分析。

第一，虽然没有严格的论证，但从一些特例的观察，从而作出大概的估计，这种纯粹数学上的猜测也是一种能力。事实上，许多数学的发现，也都是先有粗糙的猜测，然后才有严格的推导与论证．当然，这种猜测不应作为解题的主要手段，但作为辅助手段是应该提倡的．第二，当备选择答案中出现"不同于$(A)\sim(D)$的答案"或者"不唯一确定"的形式时，一旦学生由于概念模糊不清，或者运算不慎而造成错误，此时最易猜测这种形式的备选择答案正确。譬如，在前面几题的答案连续出现于(A)的情形下，接着在做下一题时，学生自然而然会有这样的猜测：可能这一题的答案不再是(A)吧！这种心理上的猜测，有时可以起到一定的作用，但不是科学的态度，不应提倡。第三，抱侥幸的心理瞎猜．这种现象在评分标准设计时已作考虑．例如，美国中学数学竞赛，老的评分方法是，每人先有30分的底数，然后每答对一题得4分，答错一题扣1分，未回答的题既不得分也不失分。这样，30道题，每题5个备选择答案，根据正态分布概率计算（取信度0.05），猜对题数将在0～10.3之间，即得分不会超过52分（内含10分的底数）．对于瞎猜者来说，再减去答错题的扣分，可能得到的总分比交白卷还要低。从1986年起，采用新的评分方法：每一题答对者得5分，不答者得2分，答错者得零分．鼓励学生实事求是的科学态度。

评　价

选择题只是命题形式中的一种．实践证明，这种题型的优点：1．突出了对选择、估计、

判断、逻辑推理能力的要求，以及解题的准确、灵活、快速的要求；2．取样广泛，特别适用于大规模的考试；3．阅卷方便(也可借助于计算机)，评分客观。

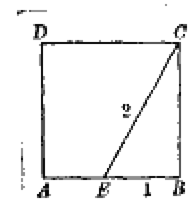
缺点：1．在考查学生的思维过程、表达能力方面有其局限性；2．在某种情况下，得满分者不一定完全掌握所涉及的知识，而较优秀的学生也未必能获得所理想的成绩．然而，这些缺点的存在，也正反映了美国中学生数学竞赛结构中，为什么要增设美国数学邀请赛的理由所在。

随着我国高考制度的改革，命题工作逐步向着标准化命题过渡，势必选择题将会日趋盛行，与此同时，对选择题的研究将会更深入一步。

第三十二届美国中学数学竞赛试题(1981年)

1. 若 $\sqrt{x+2}=2$, 那么$(x+2)^2$等于

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16.



2. 如图,点E在正方形$ABCD$的边AB上。若EB的长为1,EC的长为2,那么正方形的面积是

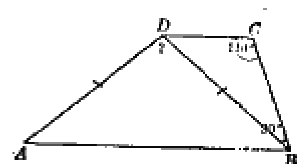
(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 3 (D) $2\sqrt{3}$ (E) 5.

3. 已知$x\neq0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$等于

(A) $\frac{1}{2x}$ (B) $\frac{1}{6x}$ (C) $\frac{5}{6x}$ (D) $\frac{11}{6x}$ (E) $\frac{1}{6x^3}$.

4. 若在两数中,大数的三倍是小数的四倍,且两数之差为8。那么两数中大数是

(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 44 (E) 52.



5. 在梯形$ABCD$中,边AB与CD平行,对角线BD与边AD的长相等。若$\angle DCB=110°$, $\angle CBD=30°$, 那么$\angle ADB$等于

(A) 80° (B) 90° (C) 100° (D) 110° (E) 120°

6. 若$\frac{x}{x-1}=\frac{y^2+2y-1}{y^2+2y-2}$,那么$x$等于

(A) y^2+2y-1 (B) y^2+2y-2 (C) y^2+2y+2 (D) y^2+2y+1

(E) $-y^2-2y+1$.

7. 在前100个正整数(即1到100)中,有多少个数能被2、3、4、5这四个数都整除?

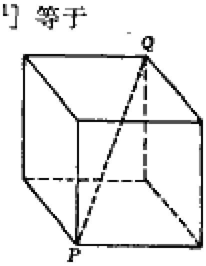
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

8. 对于所有正数x、y、z,乘积

$(x+y+z)^{-1}(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})(xy+yz+zx)^{-1}[(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}]$ 等于

(A) $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$ (B) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$ (C) $(x+y+z)^{-2}$

(D) $\frac{1}{xyz}$ (E) $\frac{1}{xy+yz+zx}$.



9. 在右图中,PQ是正方体的对角线。若PQ的长为a,那么正方体的表面积是

(A) $2a^2$ (B) $2\sqrt{2}a^2$ (C) $2\sqrt{3}a^2$ (D) $3\sqrt{3}a^2$ (E) $6a^2$.

10. 直线L和K是关于直线$y=x$互相对称的两条直线,若直线L的方程是$y=ax+b$(其中$a\neq0$, $b\neq0$),那么直线K的方程是$y=$

(A) $\frac{1}{a}x+b$ (B) $-\frac{1}{a}x+b$ (C) $-\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$ (E) $\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$.

11. 一直角三角形的三边的长都是整数,并且成等差数列,其中一边的长可能是

(A) 22 (B) 58 (C) 81 (D) 91 (E) 361.

12. 设 p、q 和 M 都是正数，且 $q<100$，若把 M 增加 $p\%$，然后再把所得的结果减少 $q\%$，那么当且仅当什么情况下，这样所得的数仍要大于 M，

(A) $p>q$ (B) $p>\frac{q}{100-q}$ (C) $p>\frac{q}{1-q}$ (D) $p>\frac{100q}{100+q}$ (E) $p>\frac{100q}{100-q}$.

13. 假设某年的年底，一单位的货币比年初贬值 10%，试求 n 年之后，使这个单位的货币要比原值贬值 90% 的最小整值 n($\lg 3$ 精确到千分之一的近似值是 0.477)。

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 22.

14. 在一个各项都是实数的等比数列中，前两项的和是 7，前六项的和是 91，那么前四项的和是

(A) 28 (B) 32 (C) 35 (D) 49 (E) 84.

15. 若 $b>1$，$x>0$，且 $(2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$，那么 x 是

(A) $\frac{1}{216}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) 1 (D) 6 (E) 解不唯一.

16. x 的三进位表示法是

$$12112211122211112222,$$

那么 x 的九进位制表示法的第一位(从左边算起)数字是

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

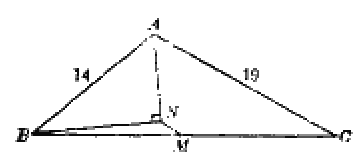
17. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，但对所有非零实数 x 有 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. 满足方程 $f(x)=f(-x)$ 的实数

(A) 恰有一个 (B) 恰有两个 (C) 不存在 (D) 有无穷多个，但并非一切非零实数 (E) 是一非零实数.

18. 方程 $\frac{x}{100}=\sin x$ 的实数解的个数是

(A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64 (E) 65.

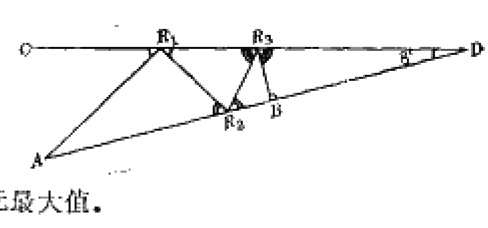
19. 在 $\triangle ABC$ 中，M 是边 BC 的中点，AN 平分 $\angle BAC$，$BN\perp AN$，且 $\angle BAC$ 的度数为 θ. 若边 AB 和 AC 的长度分别为 14 和 19，那么 MN 的长等于



(A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{5}{2}-\sin\theta$ (D) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta$

(E) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\theta$.

20. 从点 A 出发的一条光线在一平面内行进，在直线 AD 和 CD 之间反射了 n 次后，垂直地射到 B 点(该点可能在 AD 上也可能在 CD 上)，然后按原路返回点 A.(如图所示，在每一个反射点，入射光线和反射光线与 AD 或 CD 所成的角相等. 该图是 $n=3$ 时的光路图)若 $\angle CDA=8°$，n 的最大值是多少?



(A) 6 (B) 10 (C) 38 (D) 98 (E) 无最大值.

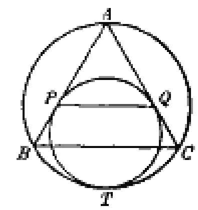
21. 在一个边长为 a、b 和 c 的三角形中，$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，则边长为 c 的边所对

的角的度数是

(*A*) 15°　(*B*) 30°　(*C*) 45°　(*D*) 60°　(*E*) 150°。

22. 在空间直角坐标系中，有多少条直线经过形如(i, j, k)的四个不同点（其中i, j, k是不大于4的正整数）？

(*A*) 60　(*B*) 64　(*C*) 72　(*D*) 76　(*E*) 100。



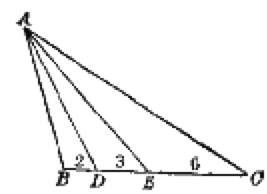
23. 如图，等边$\triangle ABC$内接于一个圆。第二个圆与外接圆内切于T，且与边AB和AC分别切于P点和Q点。若边BC的长为12，那么线段PQ的长为

(*A*) 6　(*B*) $6\sqrt{3}$　(*C*) 8　(*D*) $8\sqrt{3}$　(*E*) 9。

24. 若θ是常数，$0<\theta<\pi$，且$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$，那么对于每一个正整数$n$，$x^n+\frac{1}{x^n}$等于

(*A*) $2\cos\theta$　(*B*) $2^n\cos\theta$　(*C*) $2\cos^n\theta$　(*D*) $2\cos n\theta$

(*E*) $2^n\cos^n\theta$。

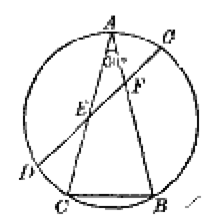


25. 如图，在$\triangle ABC$中，AD和AE三等分$\angle BAC$。BD、DE和EC的长分别是2，3和6。则$\triangle ABC$的最短边的长是

(*A*) $2\sqrt{10}$　(*B*) 11　(*C*) $6\sqrt{6}$　(*D*) 6　(*E*) 在给定的条件下无唯一确定的解。

26. Alice、Bob和Carol轮流重复掷一骰子。A先开始，接着是B，然后是C，紧跟着又是A，由此循环。试求C第一个掷出6点的概率。（任何一次掷出6点的概率都是$\frac{1}{6}$，与任何其它投掷的结果无关）。

(*A*) $\frac{1}{3}$　(*B*) $\frac{2}{9}$　(*C*) $\frac{5}{18}$　(*D*) $\frac{25}{91}$　(*E*) $\frac{36}{91}$。



27. 如图，$\triangle ABC$内接于一圆。D点在$\overset{\frown}{AC}$上，$\overset{\frown}{DC}=30°$，G点在$\overset{\frown}{BA}$上，$\overset{\frown}{BG}>\overset{\frown}{GA}$，边$AB$和$AC$的长都与弦$DG$的长相等，且$\angle CAB=30°$。弦$DG$与边$AC$、$AB$分别相交于$E$、$F$。则$\triangle AFE$的面积与$\triangle ABC$的面积之比为

(*A*) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$　(*B*) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$　(*C*) $7\sqrt{3}-12$　(*D*) $3\sqrt{3}-5$　(*E*) $\frac{9-5\sqrt{3}}{3}$。

28. 考虑形如$x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$（其中a_2, a_1, a_0都是实常数，且$|a_i|\leqslant 2, i=0,1,2$）的所有方程的集合。设$r$是最大的正实数，并且至少是其中一个方程的解，那么

(*A*) $1\leqslant r<\frac{3}{2}$　(*B*) $\frac{3}{2}\leqslant r<2$　(*C*) $2\leqslant r<\frac{5}{2}$　(*D*) $\frac{5}{2}\leqslant r<3$　(*E*) $3\leqslant r<\frac{7}{2}$。

29. 若$a\geqslant 1$，那么方程$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$的实数解之和等于

(*A*) $\sqrt{a}-1$　(*B*) $\frac{\sqrt{a}-1}{2}$　(*C*) $\sqrt{a-1}$　(*D*) $\frac{\sqrt{a-1}}{2}$　(*E*) $\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$。

30. 若a、b、c、d是方程$x^4-bx-3=0$的四个根，那么根为$\frac{a+b+c}{d^2}$，$\frac{a+b+d}{c^2}$，$\frac{a+c+d}{b^2}$，$\frac{b+c+d}{a^2}$的四次方程是

(*A*) $3x^4+bx+1=0$　(*B*) $3x^4-bx+1=0$　(*C*) $3x^4+bx^3-1=0$

(D) $3x^4-bx^3-1=0$ (E) 这些都不对。

解 答

1. [解](E) $x+2=4$; $(x+2)^2=16$。

2. [解](C) $1^2+BC^2=2^2$; 正方形的面积 $=BC^2=3$。

3. [解](D) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{6}{6x}+\frac{3}{6x}+\frac{2}{6x}=\frac{11}{6x}$。

4. [解](C) 设大数为 x，则小数为 $x-8$。$3x=4(x-8)$，因此 $x=32$。

5. [解](C) 在 $\triangle BDC$ 中，$\angle BDC=40°$。因为 DC 平行于 AB，所以 $\angle DBA=40°$。又因为等腰三角形的底角相等，所以 $\angle BAD=40°$。由此得到 $\angle ADB=100°$。

6. [解](A) $(y^2+2y-2)x=(y^2+2y-1)x-(y^2+2y-1)$，

$$[(y^2+2y-2)-(y^2+2y-1)]x=-(y^2+2y-1),$$

$$x=y^2+2y-1$$

或将已知等式的右边改写为 $\frac{y^2+2y-1}{(y^2+2y-1)-1}$，观察该式得到 $x=y^2+2y-1$。

7. [解](B) 在100以内只有5, 10, 15, …, 100这二十个数能被5整除。其中只有20、40、60、80和100还能被4整除。在这些数中只有60能被3整除，它还能被2整除。

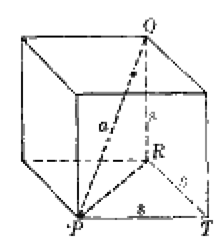
或者先求出2、3、4、5的最小公倍数是60，因此能被2、3、4、5都整除的数一定是60的倍数。

8. [解](A) 原式等于 $\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$

$$=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)$$

$$=\frac{1}{(xyz)^2}=x^{-2}y^{-2}z^{-2}.$$

9. [解](A) 如图，设 s 为正方体的棱长，R 和 T 为正方体的两个顶点。对 $\triangle PQR$ 和 $\triangle PRT$ 运用勾股定理，得到 $a^2-s^2=PR^2=s^2+s^2$，$a^2=3s^2$，表面积是 $6s^2=2a^2$。



10. [解](E) 若 (p, q) 是直线 L 上的点，那么由对称性可知点 (q, p) 必在直线 K 上，因此在 K 上的点满足 $x=ay+b$，解出 $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$。

11. [解](C) 设三角形的三边的长分别为 $s-d$，s，$s+d$。由勾股定理得

$$(s-d)^2+s^2=(s+d)^2.$$

展开后整理得

$$s(s-4d)=0.$$

因为 s 为正值，所以 $s=4d$。这样的三边的长分别为 $3d$、$4d$ 和 $5d$。即这三条边长必须能被3或4或5整除，所以只有(C)才可能是一边的长。

12. [解](E) 按题意可写出以下不等式：

$$M\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)>M,$$

即
$$1+\frac{p}{100}>\frac{1}{1-\frac{q}{100}}=\frac{100}{100-q},$$

从而
$$\frac{p}{100}>\frac{100}{100-q}-1=\frac{q}{100-q},$$

$$\therefore\quad p>\frac{100q}{100-q}.$$

13. [解](*E*)　若A表示某年年初这单位货币的值，那么$0.9A$表示该年年底它的值，0.9^nA表示第n年底它的值。我们要求出的最小整数n应满足以下不等式：

$$0.9^nA\leqslant 0.1A,$$

解之得

$$n\geqslant\frac{1}{1-2\lg 3}\approx 21.7.$$

14. [解](*A*)　设a和r分别是这个等比数列的首项和公比，那么$a+ar=7$，

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=91.$$

把上面的第二个方程除以第一个方程，得到

$$\frac{r^6-1}{r^2-1}=13,$$

将上式整理后，可得

$$(r^2+4)(r^2-3)=0.$$

这样$r^2=3$，从而立即有

$$a+ar+ar^2+ar^3=(a+ar)(1+r^2)=7\times 4=28.$$

15. [解](*B*)　先把$\log_6$简写成$\log$，已知方程等价于

$$(2x)^{\log 2}=(3x)^{\log 3},$$

即

$$\frac{2^{\log 2}}{3^{\log 3}}=x^{\log 3-\log 2}.$$

将上式的两边取对数，得

$$(\log 2)^2-(\log 3)^2=(\log 3-\log 2)\log x,$$

$$-(\log 2+\log 3)=\log x,$$

$$\log\frac{1}{6}=\log x,$$

$$x=\frac{1}{6}.$$

16. [解](*E*)　把x的三进位制表示的数字一对对地组合，得到

$$\begin{aligned}x&=(1\times 3^{19}+2\times 3^{18})+(1\times 3^{17}+1\times 3^{16})+\cdots+(2\times 3+2)\\&=(1\times 3+2)(3^2)^9+(1\times 3+1)\times(3^2)^8+\cdots+(2\times 3+2).\end{aligned}$$

因此，x的九进位制的第一位数字是$1\times 3+2=5$。

17. [解](*B*)　以$\frac{1}{x}$代替已知方程$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$中的$x$，得到

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}.$$

从这两个方程中消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$，得到

$$f(x)=\frac{2-x^2}{x}.$$

那么当且仅当

$$\frac{2-x^2}{x}=\frac{2-(-x)^2}{-x}$$

时，$f(x)=f(-x)$，此时

$$x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2},$$

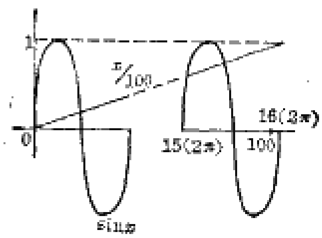
故方程$f(x)=f(-x)$仅有两个解。

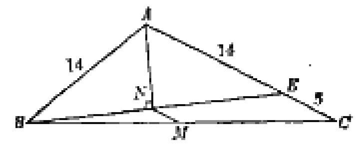
18. [解](*C*)　因为$\frac{-x}{100}=\sin(-x)$，因此方程有相同个数的正根和负根。此外，$x=0$也是方程的一个根。由于$|x|=100|\sin x|\leqslant 100$，因而方程的所有正根小于或等于100。

因为$15.5<\frac{100}{2\pi}<16$，所以$\frac{x}{100}$和$\sin x$的图象如图所示。这样，所给方程在0和π之间有一个

根。从$(2k-1)\pi$到$(2k+1)\pi$的每一个区间上$(1\leqslant k\leqslant 15)$都有两个根，因此根的总数是

$$1+2(1+2\times 15)=63.$$





19. [解](B)　在附图中，延长BN，交AC于E。

因为$\angle BAN=\angle EAN$，$AN=AN$，$\angle ANB=\angle ANE$，所以$\triangle BNA\cong\triangle ENA$。因而$N$是$BE$的中点。$AB=AE=14$，$EC=19-14=5$。又因为$M$是$BC$的中点，$MN$是$\triangle BCE$的中位线，所以$MN=\dfrac{1}{2}EC=\dfrac{5}{2}$。

20. [解](B)　设$\angle DAR_1=\theta$，又设θ_i是光线和反射光线在第i次反射点所形成的锐角。对$\triangle AR_1D$用三角形外角定理，然后对$\triangle R_{i-1}R_iD$(其中$2\leqslant i\leqslant n$)逐个运用外角定理，最后对$\triangle R_nBD$也运用该定理，得到

$$\theta_1=\theta+8^\circ,$$
$$\theta_2=\theta_1+8^\circ=\theta+16^\circ,$$
$$\theta_3=\theta_2+8^\circ=\theta+24^\circ,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\theta_n=\theta_{n-1}+8^\circ=\theta+(8n)^\circ,$$
$$90^\circ=\theta_n+8^\circ=\theta+(8n+8)^\circ.$$

但是θ必须是正的，所以

$$0<\theta=90-(8n+8),$$
$$n<\frac{82}{8}<11.$$

若$\theta=2^\circ$，那么n就达到最大值10。

21. [解](D)　设θ是边长为c的边所对的角。由已知条件

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab,$$

即

$$(a+b)^2-c^2=3ab,$$
$$a^2+b^2-ab=c^2.$$

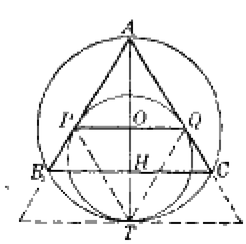
而

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2,$$

所以

$$ab=2ab\cos\theta,\ \text{且立即可得}$$
$$\theta=60^\circ.$$

22. [解](D)　在空间直角坐标系中，考虑包含所有格点(i,j,k)的最小立方体(其中$1\leqslant i,j,k\leqslant 4$)。它有4条主对角线。有24条与坐标平面平行的对角线：四个平面的每一面有2条对角线，平行于空间坐标平面(即三个坐标平面)的每一面。有48条直线平行于坐标轴：三个方向的每一个有16条直线与其平行。所以共有$4+24+48=76$条直线。



23. [解](C)　设O和H分别是PQ和BC与直径AT的交点。过T的切线与边AB、AC的延长线围成一个等边三角形。图中的小圆是该等边三角形的内切圆，P、Q、T都是切点，所以$\triangle PQT$是等边三角形。因为$\triangle APQ$是一个与$\triangle PQT$有一条公共边的等边三角形，所以$\triangle APQ\cong\triangle PQT$。这样，$AO=OT$，$O$是大圆的圆心。

这就是说 $AO=\frac{2}{3}(AH)$，因此 $PQ=\frac{2}{3}(BC)=8$。

24. [解](D)　把 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ 变形为

$$x^2-2x\cos\theta+1=0,$$

那么 $x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta(=e^{\pm i\theta})$。

运用棣莫弗公式

$$x^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta(=e^{\pm i\theta}),$$

$$\frac{1}{x^n}=\frac{1}{\cos n\theta\pm i\sin n\theta}=\cos n\theta\mp i\sin n\theta(=e^{\mp i\theta}),$$

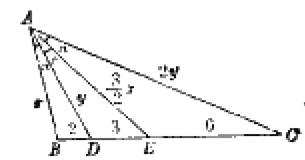
即可得

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta。$$

25. [解法一](A)　设 $\angle BAC=3x$，$AB=x$，$AD=y$（见图1）。然后由三角形的角平分线定理，得

$$\frac{AB}{AE}=\frac{2}{3},\qquad \frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}。$$

因此，$AE=\frac{3}{2}x$，$AC=2y$。



(图 1)

在 $\triangle ADB$，$\triangle AED$ 和 $\triangle ACE$ 中分别用余弦定理，得

$$\frac{x^2+y^2-4}{2xy}=\frac{\frac{9}{4}x^2+y^2-9}{3xy}=\frac{\frac{9}{4}x^2+4y^2-36}{6xy}。$$

由第一和第二表达式的等式化简得

$$3x^2-2y^2=12。$$

由第一和第三表达式的等式化简得

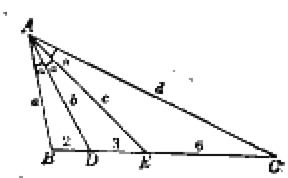
$$3x^2-4y^2=-96。$$

解这两个关于 x，y 的联立方程，得到

$$x=2\sqrt{10},\ y=\sqrt{54}=3\sqrt{6}。$$

这样，边 $AB=2\sqrt{10}\approx6.3$，$AC=6\sqrt{6}\approx14.7$，$BC=11$。

[解法二]　设 $AB=a$，$AD=b$，$AE=c$，$AC=d$（见图2）。用角平分线定理



(图 2)

$$\frac{a}{c}=\frac{2}{3},\ \frac{b}{d}=\frac{3}{6}。$$

这样，$a=\frac{2}{3}c$ 和 $d=2b$，再由角平分线长的公式*

$$b^2+6=ac,\ c^2+18=bd。$$

在这两个方程中用上述 a、b、c、d 间的关系，可以得到

$$b^2+6=\frac{2}{3}c^2,\ c^2+18=2b^2。$$

解关于 c^2 和 b^2 的方程，得到

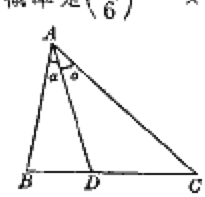
$$c^2=90,\ b^2=54。$$

这样，$a=\frac{2(3\sqrt{10})}{3}=2\sqrt{10}$，$d=2(3\sqrt{6})=6\sqrt{6}$。

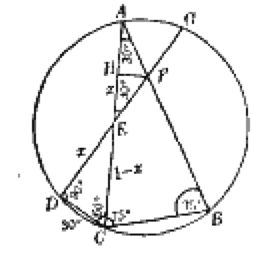
26. [解](D)　Carol 第一次掷骰子就第一个掷到6的概率是 $\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$，她第二次掷骰子第一个掷到6的概率是 $\left(\frac{5}{6}\right)^5\times\frac{1}{6}$，…，总之，Carol 在第 n 次第一个掷到6的概率是 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-1}\times\frac{1}{6}$。

所以，Carol 成为第一个掷到6的概率是

* 角平分线长度公式：设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，那么 $AD^2+BD\cdot DC=AB\cdot AC$。



$$\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^5\times\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-1}\times\frac{1}{6}+\cdots,$$



这是一个首项为 $a=\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$，公比为 $r=\left(\frac{5}{6}\right)^3$ 的无穷递缩等比数列的和，其和是 $\frac{a}{1-r}=\frac{25}{91}$。

27. [解](C)　在附图中，作线段 DC。

因为 $\widehat{AC}=150°$，$\widehat{AD}=\widehat{AC}-\widehat{DC}=150°-30°=120°$。因此 $\angle ACD=60°$。又因为 $AC=DG$，$\widehat{GA}=\widehat{GD}-\widehat{AD}=\widehat{AC}-120°=30°$。所以 $\widehat{CG}=180°$，$\angle CDG=90°$。这样，$\triangle DEC$ 是一个含有 $30°$ 角的直角三角形。因为我们要求的是面积之比。不失一般性，假定 $AC=AB=DG=1$，再设 $AE=x=DE$，那么 $CE=1-x=\frac{x}{\sqrt{3}}\times 2$。解出 $AE=x=2\sqrt{3}-3$。

又设 FH 是 $\triangle AFE$ 中 AE 边上的高，则 $EH=\frac{AE}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$，$FH=\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$。$\triangle AFE$ 的面积 $=EH\cdot FH=\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{7\sqrt{3}-12}{4}$。$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 30°=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

因此 $\frac{\triangle AFE\text{的面积}}{\triangle ABC\text{的面积}}=7\sqrt{3}-12$。

28. [解](D)　设 $g(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 是一个有指定形式常数的任意三次多项式。因为对于充分大的 x，x^3 支配着其它各项，对于所有比 $g(x)$ 的最大实根大的 x，有 $g(x)>0$。这样我们得寻找一个特定的 $g(x)$，其中各项 $a_2x^2+a_1x+a_0$ 尽可能"抑制"$g(x)$，以至使方程最大实根的值尽可能大。猜测该题的答案是 $f(x)=x^3-2x^2-2x-2$ 的最大实根。设该根为 r_0。为了证实这个推测，注意当 $x\geqslant 0$ 时，$-2x^2\leqslant a_2x^2$，$-2x\leqslant a_1x$，$-2\leqslant a_0$。把这些不等式相加，两边都加上 x^3，对于所有 $x\geqslant 0$，得到 $f(x)\leqslant g(x)$。这样，对于所有的 $x>r_0$，$0<f(x)\leqslant g(x)$。那就是说，$g(x)$ 中没有一个根比 r_0 大，所以 r_0 就是题中的 r。

$f(x)$ 的草图可显示它是一个典型的 S 型图象的三次多项式，它的最大根略小于 3。事实上，$f(2)=-6$，$f(3)=1$。为了完全确定答案是 (D)，而不是 (C)。还应计算 $f\left(\frac{5}{2}\right)$，看看它是不是负的，事实上确实有 $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{31}{8}$。

29. [解](E)　因为 x 是一些量的算术平方根，所以 $x\geqslant 0$。由于 $x\geqslant 0$，已知方程等价于 $a-\sqrt{a+x}=x^2$。因为这个方程的左边是 x 的递减函数，右边是递增函数，很容易验证方程只有一个根。设 $y=\sqrt{a+x}$，解方程

$$a-y=x^2,$$
$$a-y-y^2=x^2-y^2,$$
$$a-y-(a+x)=x^2-y^2,$$
$$-(x+y)=(x+y)(x-y),$$
$$(x+y)(x-y+1)=0.$$

因为　$a\geqslant 1$，$x\geqslant 0$，故 $y>0$，$x+y\neq 0$。

所以　$x-y+1=0$，

亦即　$x+1=\sqrt{a+x}$，

从而　$(x+1)^2=a+x$，

解之得　$x=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$。

上式中，负值不是原方程的根，正根 $x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$ 是方程 $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ 的实数解之和。

30. [解](D)　因为在多项式函数 $f(x)=x^4-bx-3$ 中 x^3 的系数是零，所以 $f(x)$ 的根的和也是零。

因此，$\frac{a+b+c}{d^2}=\frac{a+b+c+d-d}{d^2}=-\frac{1}{d}$。

同理，$\frac{a+c+d}{b^2}=-\frac{1}{b}$，$\frac{a+b+d}{c^2}=-\frac{1}{c}$，$\frac{b+c+d}{a^2}=-\frac{1}{a}$。

因此方程 $f\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，即 $3x^4-bx^3-1=0$ 有题中指定的解。

第三十三届美国中学数学竞赛试题(1982 年)

1．当多项式 x^3-2 除以多项式 x^2-2 时，其余项为

(A) 2　(B) -2　(C) $-2x-2$　(D) $2x+2$　(E) $2x-2$。

2．将 x 的八倍再加以 2，其结果的四分之一为

(A) $2x+\frac{1}{2}$　(B) $x+\frac{1}{2}$　(C) $2x+2$　(D) $2x+4$　(E) $2x+16$。

3．在 $x=2$ 处，计算 $(x^x)^{(x^x)}$ 的结果应为

(A) 16　(B) 64　(C) 256　(D) 1024　(E) 65536。

4．一个半圆的周长的数值（以厘米为单位）正好等于该半圆的面积的数值（以平方厘米为单位），则该半圆的半径为（以厘米为单位）

(A) π　(B) $\frac{2}{\pi}$　(C) 1　(D) $\frac{1}{2}$　(E) $\frac{4}{\pi}+2$。

5．x、y 为两个正数，$x:y=a:b$，其中 $0<a<b$。如果 $x+y=c$，则 x 与 y 中较小的一个为

(A) $\frac{ac}{b}$　(B) $\frac{bc-ac}{b}$　(C) $\frac{ac}{a+b}$　(D) $\frac{bc}{a+b}$　(E) $\frac{ac}{b-a}$。

6．设有一个凸多边形，除去一个内角以外的所有其他内角之和为 2570°，该内角为

(A) 90°　(B) 105°　(C) 120°　(D) 130°　(E) 144°。

7．运算 $x*y=(x+1)(y+1)-1$，则下列结论中哪一个是不成立的？

(A) 对任何实数 x 和 y，$x*y=y*x$

(B) 对任何实数 x、y、z，$x*(y+z)=(x*y)+(x*z)$

(C) 对任何实数 x，$(x-1)*(x+1)=(x*x)-1$

(D) 对任何实数 x，$x*0=x$

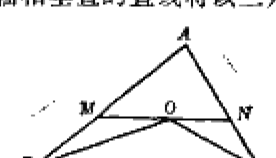
(E) 对任何实数 x、y、z，$x*(y*z)=(x*y)*z$。

8．定义 $r!=r(r-1)\cdots1$ 及 $\binom{j}{k}=\frac{j!}{k!(j-k)!}$，其中 r，j，k 均为正整数，且 $j<k$。如果 $n>3$，且 $\binom{n}{1}$，$\binom{n}{2}$，$\binom{n}{3}$ 构成等差数列，则 n 等于

(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11　(E) 12。

9．一个三角形以 (0，0)，(1，1) 及 (9，1) 为三个顶点，一条与 x 轴相垂直的直线将该三角形划分成面积相等的两部分，则该直线的方程为 $x=$

(A) 2.5　(B) 3.0　(C) 3.5　(D) 4.0　(E) 4.5。



10．在附图中，BO 平分 $\angle CBA$，CO 平分 $\angle ACB$，且 $MN\parallel BC$，设 $AB=12$，$BC=24$，$AC=18$，则 $\triangle AMN$ 的周长为

(A) 30　(B) 33　(C) 36　(D) 39　(E) 42。

11．在 1000 与 9999 之间有多少个四位数，其各位数字互不相同，且首尾两个数字之差为

2?

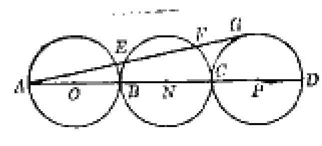
(*A*) 672 (*B*) 784 (*C*) 840 (*D*) 896 (*E*) 1008.

12. 设 $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$，其中 a、b、c 为常数，已知 $f(-7)=7$，则 $f(7)$ 等于

(*A*) -17 (*B*) -7 (*C*) 14 (*D*) 21 (*E*) 不能唯一确定。

13. 设 $a>1$，$b>1$，且 $P=\dfrac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}$，则 a^P 等于

(*A*) 1 (*B*) b (*C*) $\log_a b$ (*D*) $\log_b a$ (*E*) $a^{\log_b a}$.



14. 在附图中，圆 O 与圆 N 相切，圆 N 与圆 P 相切，AB、BC、CD 分别为它们的直径，且 $AB=BC=CD=30$，又 AG 与圆 P 相切于 G 点。设 AG 与圆 N 相交于 E 与 F 两点，则弦 EF 的长度为

(*A*) 20 (*B*) $15\sqrt{2}$ (*C*) 24 (*D*) 25 (*E*) 上述数字都不对。

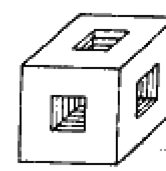
15. 令 $[z]$ 表示不超过 z 的最大整数。设 x、y 满足下列方程组

$$\begin{cases} y=2[x]+3, \\ y=3[x-2]+5, \end{cases}$$

假设 x 不是一个整数，则 $x+y$ 必定是

(*A*) 一个整数 (*B*) 在 4 与 5 之间 (*C*) 在 -4 与 4 之间 (*D*) 在 15 与 16 之间 (*E*) 16.5.

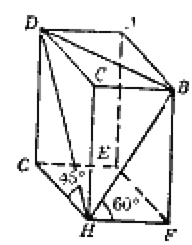
16. 附图表示，一个木头立方体的棱长为 3 米，从每个面的中间割出一个边长为 1 米的正方形洞直至其对面，洞的边分别平行于立方体的边。则以平方米为单位，整个表面积(包括内部表面积)为



(*A*) 54 (*B*) 72 (*C*) 76 (*D*) 84 (*E*) 86.

17. 方程 $3^{2x+2}-3^{x+3}-3^x+3=0$ 有多少个实数解？

(*A*) 0 (*B*) 1 (*C*) 2 (*D*) 3 (*E*) 4.



18. 在附图所表示的长方体中，$\angle DHG=45°$，$\angle FHB=60°$，则 $\angle BHD$ 的余弦为

(*A*) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (*B*) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (*C*) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (*D*) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ (*E*) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

19. 设 $f(x)=|x-2|+|x-4|-|2x-6|$，其中 $2\leqslant x\leqslant 8$，则 $f(x)$ 的最大值与最小值之和为

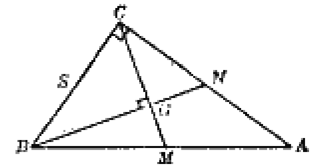
(*A*) 1 (*B*) 2 (*C*) 4 (*D*) 6 (*E*) 上述数值都不对。

20. 满足方程 $x^2+y^2=x^3$ 的正整数对 (x, y) 的个数为

(*A*) 0 (*B*) 1 (*C*) 2 (*D*) 无限个 (*E*) 上述结论都不对。

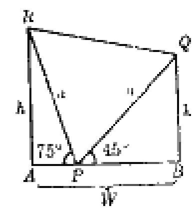
21. 在附图中，$\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle BCA=90°$，中线 CM 垂直于中线 BN，且边 $BC=S$，则 BN 的长度为

(*A*) $S\sqrt{2}$ (*B*) $\dfrac{3}{2}S\sqrt{2}$ (*C*) $2S\sqrt{2}$ (*D*) $\dfrac{S\sqrt{5}}{2}$ (*E*) $\dfrac{S\sqrt{6}}{2}$.



22. 参见附图，设在一个宽度为 W 的小巷内，一个梯子的长为 a，梯子

的脚位于P点，将该梯子的顶端放于一堵墙上Q点时，Q离开地面的高度为k，梯子的倾斜角为45°；将该梯子的顶端放于另一堵墙上R点时，R离开地面的高度为h，且此时梯子的倾斜角为75°，则小巷的宽度等于

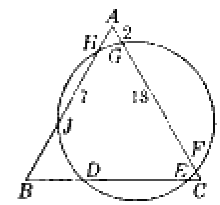


(A) a (B) RQ (C) k (D) $\frac{h+k}{2}$ (E) h.

23. 一个三角形的三边的长度为相继的三个整数，其最大角为最小角的二倍，则最小角的余弦为

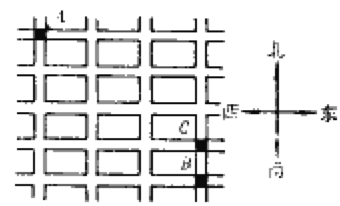
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{9}{14}$ (E) 上述数值都不对。

24. 附图表示，一个圆与一个正三角形的三边交于六点，已知$AG=2$，$GF=13$，$FC=1$，$HJ=7$，则DE等于



(A) $2\sqrt{22}$ (B) $7\sqrt{3}$ (C) 9 (D) 10 (E) 13.

25. 附图为城市的一部分的地图，小的长方形表示街块(注：一个街块表示东西向二个相邻街道之间及南北向二个相邻街道之间的区域)，其余部分表示街道. 每天早上，某个学生总是从街口A点走到街口B点，其行走方向总是向东或向南，在每一个街口，他以$\frac{1}{2}$的概率来选择向东或向南(独立于其他街口处的选择)。那么，在某一天早上，该学生通过街口C的概率为



(A) $\frac{11}{32}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{21}{32}$ (E) $\frac{3}{4}$.

26. 在八进制的数字表示中，一个完全平方数为$ab3c$，其中$a\neq 0$，则c为

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 并非唯一确定。

27. 设$z=a+bi(i^2=-1)$是下列多项式$c_4z^4+ic_3z^3+c_2z^2+ic_1z+c_0=0$的解，其中$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, a, b$均为实常数，则下列数中哪一个也必为上述方程的解?

(A) $-a-bi$ (B) $a-bi$ (C) $-a+bi$ (D) $b+ai$ (E) 上述数值均不对。

28. 在黑板上从1开始，写出一组相继的正整数，然后擦去了一个数，其余数的平均值为$35\frac{7}{17}$。问擦去的数是什么数?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 不能确定。

29. 设x、y、z为三个正实数，其和为1，又三数中的任何一个数不超过另一个数的两倍，则乘积xyz所可能取的数值之中，最小值为

(A) $\frac{1}{32}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{4}{125}$ (D) $\frac{1}{127}$ (E) 上述数值都不对。

30. 设$x=(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$，则数$x$的十进展开式中的个位数为

(A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) 9 (E) 上述数值都不对。

解　　答

1. [解](E) ∵ $x^3-2=x(x^2-2)+(2x-2)$，∴ 余项为$2x-2$。

2. [解] (A) $\frac{1}{4}(8x+2)=2x+\frac{1}{2}$。

3. [解] (C) ∵ $x=2$ 时, $x^x=4$, ∴ $(x^x)^{(x^x)}=4^4=256$。

4. [解] (E) 设半径为 R, 则 $2R+\pi R=\frac{1}{2}\pi R^2$, ∴ $R=\frac{4+2\pi}{\pi}=\frac{4}{\pi}+2$。

5. [解] (C) ∵ $b>a>0$, $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, ∴ $x<y$, 且 $\frac{x}{x+y}=\frac{a}{a+b}$。又 ∵ $x+y=c$, ∴ $x=\frac{ac}{a+b}$。

6. [解] (D) 设已知凸多边形的边数为 n, 则

$$0°<(n-2)\cdot 180°-2570°<180°,\ 2570°<(n-2)\cdot 180°<2750°,$$

即 $14\frac{5}{18}<(n-2)<15\frac{5}{18}$. ∵ $n-2\in N$, ∴ $n-2=15$, $n=17$. 于是所求角为 $15\times 180°-2570°=130°$。

7. [解] (B) ∵ $x*(y+z)=(x+1)(y+z+1)-1=xy+xz+x+y+z$,

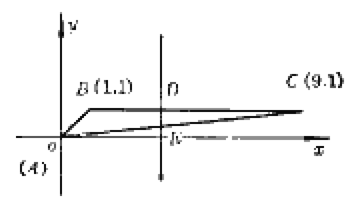
$$(x*y)+(x*z)=[(x+1)(y+1)-1]+[(x+1)(z+1)-1]$$
$$=xy+xz+2x+y+z,$$

∴ $x*(y+z)\neq(x*y)+(x*z)$。

8. [解] (B) ∵ $2\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}$, 即 $n(n-1)=n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, 又 ∵ $n>3$, ∴ $n-1=1+\frac{(n-1)(n-2)}{6}$, $n-2=\frac{(n-1)(n-2)}{6}$, $1=\frac{n-1}{6}$, $n=7$。

9 [解] (B) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1=4$。

设直线方程是 $x=a$, $1<a<9$. ∵ AC 的直线方程为 $y=\frac{1}{9}x$, ∴ BC 及 AC 与直线 $x=a$ 的交点是 $D(a,1)$, $E\left(a, \frac{a}{9}\right)$, 故 $S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}(9-a)\left(1-\frac{a}{9}\right)=2$. 解之, 得 $a=3$。



(4)

10. [解] (A) 由题设知, $\angle MBO=\angle OBC=\angle BOM$, ∴ $MO=MB$. 同理 $NO=NC$, ∴ $\triangle AMN$ 的周长 $=AB+AC=30$。

11. [解] (C) 设符号要求的四位数为 $\overline{abcd}$, a 不能取 0. 当 a 取 1、8、9 时, d 只能相应地取 3、6、7; 当 a 取 2,3,4,5,6,7 中任一个数时, d 都有二种取法. 至于数组 $\overline{bc}$ 的取法为剩下 8 个数码中任取二个的排列. 故符合条件的四位数有 $3\times P_8^2+6\times 2\times P_8^2=840$ 个。

12. [解] (A) ∵ $f(-7)=-a\cdot 7^7-b\cdot 7^3-c\cdot 7-5=7$,

$$a\cdot 7^7+b\cdot 7^3+c\cdot 7=-12,$$

∴ $f(7)=a\cdot 7^7+b\cdot 7^3+c\cdot 7-5=-12-5=-17$。

13. [解] (D) ∵ $P=\log_a(\log_b a)$, ∴ $a^P=\log_b a$。

14. [解] (C) 连 PG, 且自 N 作 EF 的垂线, 垂足为 Q, 则 $PG=15$, 且 $\frac{NQ}{PG}=\frac{AN}{AP}=\frac{45}{75}=\frac{3}{5}$, ∴ $NQ=9$, $EF=2\sqrt{NF^2-NQ^2}=2\sqrt{15^2-9^2}=24$。

15. [解] (D) 将两个方程相减得, 得 $2[x]-3[x-2]-2=0$. ∵ $[x-2]=[x]-2$, ∴ $[x]=4$, $y=11$. 因 x 不是整数, 故 $15<x+y<16$。

16. [解] (B) 整个表面积为 $6\times(3^2-1^2)+6\times 4\times 1\times 1=72$(平方米)。

17. [解] (C) 原方程即 $9\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+3=0$, 将它视作以 3^x 为未知数的一元二次方程, $\Delta=28^2-4\times 9\times 3>0$, 3^x 有两个相异正实数解, 从而 x 有二个实数解。

18. [解] (D) 不妨设 $BH=2a$, 则由题设易得 $BC=a$, $CH=CD=\sqrt{3}a$, ∴ $DH=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}a=\sqrt{6}a$, $BD=2a$, 于是

$$\cos\angle BHD=\frac{(2a)^2+(\sqrt{6}a)^2-(2a)^2}{2\cdot 2a\cdot\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{6}}{4}。$$

19. [解](B)　由折线段的单调性，可知 $f(x)$ 在 $[2, 8]$ 上的最大值 M、最小值 m 只能在 $x=2,3,4,8$ 四点达到。计算得 $f(2)=0$, $f(3)=2$, $f(4)=0$, $f(8)=0$。∴　$M+m=2+0=2$。

20. [解](D)　由 $x^2+y^2=x^3$ 得 $y^2=x^2(x-1)$，∴　只要 $x-1$ 为自然数的平方 k^2，则 $x=k^2+1$, $y=k(k^2+1)$ 即符合要求。故满足已知方程的正整数对 (x, y) 有无限多个。

21. [解](E)　由题设，$S^2=BC^2=BG\cdot BN=\frac{2}{3}(BN)^2$，∴　$BN=\frac{\sqrt{6}}{2}S$。

22. [解](E)　由题设知，$\angle RPQ=180°-45°-75°=60°$，∴　$\triangle PQR$ 为正三角形。又 $\triangle PBQ$ 为直角等腰三角形，∴　R, B 均在 PQ 的中垂线上，$\angle RBA=45°$，$AB=AR=h$。

23. [解](A)　设三角形三边长为 $x-1, x, x+1$，则 $x-1$ 所对的角 α 必是最小角，而 $x+1$ 所对的角必是最大角 2α。由正弦定理，$\frac{x+1}{\sin 2\alpha}=\frac{x-1}{\sin\alpha}$，∴　$\cos\alpha=\frac{x+1}{2(x-1)}$。又由余弦定理，

$$\cos\alpha=\frac{x^2+(x+1)^2-(x-1)^2}{2x(x+1)}=\frac{x+4}{2(x+1)}.$$

于是，

$$\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{x+4}{2(x+1)},$$

解之，得 $x=5$。

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{3}{4}.$$

24. [解](A)　由割线定理，$AH\cdot(AH+7)=AG\cdot AF=30$，∴　$AH=3$。

又　∵　$AC=AB$，∴　$BJ=(1+13+2)-(3+7)=6$。

设 $BD=x$, $CE=y$，则由割线定理得

$$\begin{cases}BD\cdot BE=BJ\cdot BH,\\ CE\cdot CD=CF\cdot CG,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x(16-y)=6\times 13,\\ y(16-x)=1\times 14.\end{cases}$$

相减得 $16x-16y=64$，$x=y+4$。于是

$$y[16-(y+4)]=14,\ y^2-12y+14=0.$$

∵　$x+y=2y+4<16$，∴　$y<6$。于是解得 $y=6-\sqrt{22}$，

$$x+y=2y+4=16-2\sqrt{22},\quad DE=16-(x+y)=2\sqrt{22}.$$

25. [解](D)　由 A 到 B 需选择走向 6 次，每次从东、南二者中取一，共有 $2^6=64$ 种可能（虽在右或下边界的街口，并不需要选择走向，但为计算方便，形式上仍作选择。实际上走向与选择无关）。若 6 次选向中，至少有 3 次向东，则必过街口 C，其走法共有 $C_6^6+C_6^5+C_6^4+C_6^3=42$ 种。∴　过 C 的概率为 $\frac{42}{64}=\frac{21}{32}$。

26. [解](B)　$n^2=a\cdot 8^3+b\cdot 8^2+3\times 8+c\ (0\leqslant c\leqslant 7)$。若 n 为偶数，则 n^2 为 4 的倍数，∴　$c=0$ 或 4。若 $c=0$，则 $n^2=8(a\cdot 8^2+b\cdot 8+3)$ 是 8 的奇数倍，因而不是完全平方数；若 $c=4$，则 $n^2=4(2a\cdot 8^2+2b\cdot 8+7)$，但 $2a\cdot 8^2+2b\cdot 8+7$ 是奇数，且除以 8 余 7。故不能为奇数的平方，即 $c=4$ 也不可能。∴　n 为奇数，n^2 除以 8 余 1，$c=1$。

27. [解](C)　原方程可变形成 $c_4(iz)^4-c_3(iz)^3-c_2(iz)^2+c_1(iz)+c_0=0$，∴　$x=iz$ 是实系数四次方程 $c_4x^4-c_3x^3-c_2x^2+c_1x+c_0=0$ 的根，因而 $\bar{x}=\overline{iz}$ 也应是它的根，$\frac{\bar{x}}{i}=-\bar{z}=-a+bi$ 必是原方程的解。

28. [解](B)　设 $1, 2, \cdots, n$ 中擦去 k，平均数为 $35\frac{7}{17}$，那么

$$\frac{n}{2}=\frac{1+2+\cdots+n-n}{n-1}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1}=35\frac{7}{17}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n-1}{n-1}=\frac{n+2}{2},$$

∴　$68\frac{14}{17}\leqslant n\leqslant 70\frac{14}{17}$。∵　$n\in N$，∴　$69\leqslant n\leqslant 70$。

又　∵　$n-1$ 必是 17 的倍数，∴　$n=69$。

再由 $\frac{1+2+\cdots+69-k}{68}=35\frac{7}{17}$，即 $\frac{2415-k}{68}=\frac{602}{17}$，得 $k=7$。

29. [解](A) 不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，由题设知 $z\leqslant 2x$。先固定 y，则 $x+z=1-y$。令

$$x=\frac{1-y}{2}-t,\quad z=\frac{1-y}{2}+t,\quad 0\leqslant t<\frac{1-y}{2},$$

那么

$$xyz=y\left[\left(\frac{1-y}{2}\right)^2-t^2\right].$$

为了使 xyz 最小，必须 t 最大。

∵ $2t=z-x\leqslant 2x-x=x$，∴ 要 xyz 最小，必须 $2t=x$，$z=2x$，此时 $y=1-3x$。由 $x\leqslant 1-3x\leqslant 2x$ 得 $\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}$。现在问题转化成在 $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$ 上求函数 $f(x)=xyz=x(1-3x)\cdot 2x=2x^2(1-3x)$ 的最小值。依照三次曲线 $y=f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 上只有唯一的极大值的特点，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$ 上的最小值只能在区间的端点上取到。

∵ $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{125}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{32}$，∴ xyz 的最小值为 $\frac{1}{32}$。

30. [解](D) 由二项式定理知，对任意自然数 n，

$$(15+\sqrt{220})^n+(15-\sqrt{220})^n=2[15^n+C_n^2(15)^{n-2}\cdot 220+\cdots]$$

为整数，且个位数为 0。因此 $x+(15-\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{82}$ 是个位数为 0 的整数。

∵ $15-\sqrt{220}=\frac{5}{15+\sqrt{220}}<\frac{5}{25}=0.2$，

∴ $(15-\sqrt{220})^{82}<(15-\sqrt{220})^{19}<0.2^{19}<0.01$，

$(15-\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{82}<0.02$，

故 x 的个位数为 9。

第三十四届美国中学数学竞赛试题(1983年)

1．若$x\neq0$，$\frac{x}{2}=y^2$，$\frac{x^2}{4}=4y$，则x等于

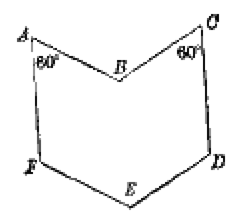
(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64 (E) 128。

2．P是平面上的圆C外的一点，圆C上距P为3厘米的点至多有

(A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个 (E) 8个。

3．三个质数p、q和r，满足$p+q=r$以及$1<p<q$，则p等于

(A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) 13 (E) 17。



4．在附图的平面图形中，边AF与CD平行，AB与FE平行，BC与ED平行，各边长度为1，且$\angle FAB=\angle BCD=60°$。该图形的面积是

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 2。

5．在三角形ABC中，$\angle C$为直角．如果$\sin A=\frac{2}{3}$，那么$\operatorname{tg}B$是

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (E) $\frac{5}{3}$。

6．把x^5，$x+\frac{1}{x}$ $1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$相乘，其积是一个多项式，该多项式的次数是

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 8。

7．Alice(人名)以低于牌价10元的价格售出一物并得到售价的10%作佣金。Bob(人名)以低于牌价20元的价格售出同一物并得到售价的20%作为佣金。若两人得到的佣金相同，则此物的牌价是

(A) 20元 (B) 30元 (C) 50元 (D) 70元 (E) 100元。

8．令$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$，当$x^2\neq1$时，$f(-x)$等于

(A) $\frac{1}{f(x)}$ (B) $-f(x)$ (C) $\frac{1}{f(-x)}$ (D) $-f(-x)$ (E) $f(x)$。

9．在某项人口统计中妇女人数与男子人数之比为11:10。若妇女的平均年龄(算术平均)为34岁，男子的平均年龄为32岁，则该项人口统计中的平均年龄是

(A) $32\frac{1}{10}$ (B) $32\frac{20}{21}$ (C) 33 (D) $33\frac{1}{21}$ (E) $33\frac{1}{10}$。

10．线段AB既是一个半径为1的圆的半径，又是等边三角形ABC的一条边，该圆分别交AC与BC于点D和E，AE的长度是

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$。

11．化简$\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y$，得到

(*A*) 1 (*B*) $\sin x$ (*C*) $\cos x$ (*D*) $\sin x\cos 2y$ (*E*) $\cos x\cos 2y$.

12. 若 $\log_7(\log_3(\log_2 x))=0$，则 $x^{-\frac{1}{2}}$ 等于

(*A*) $\frac{1}{3}$ (*B*) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (*C*) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (*D*) $\frac{1}{\sqrt{42}}$ (*E*) 不同于(*A*)～(*D*)的另一数。

13. 若 $xy=a$，$xz=b$，$yz=c$，且这些量均不为零，则 $x^2+y^2+z^2$ 等于

(*A*) $\frac{ab+ac+bc}{abc}$ (*B*) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ (*C*) $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$ (*D*) $\frac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$

(*E*) $\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$.

14. $3^{1001}\times 7^{1002}\times 13^{1003}$ 的个位数是

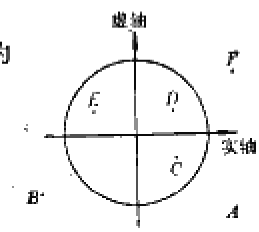
(*A*) 1 (*B*) 3 (*C*) 5 (*D*) 7 (*E*) 9.

15. 三个球分别标上号码 1，2，3 放在一瓮中，摸出一球记下其号码再放回去，这样的过程一共进行三次，在每一次摸球过程中，任一个球被摸出的机会是相等的。若记下的号码之和是 6，三次摸出的都是 2 号球的概率是

(*A*) $\frac{1}{27}$ (*B*) $\frac{1}{8}$ (*C*) $\frac{1}{7}$ (*D*) $\frac{1}{6}$ (*E*) $\frac{1}{3}$.

16. 令 $x=0.123456789101112\cdots998999$，其中的数字是由依次写下整数 1 至 999 得到的。小数点右边第 1983 位数字是

(*A*) 2 (*B*) 3 (*C*) 5 (*D*) 7 (*E*) 8.



17. 右图上标出了复平面上的几个复数。其中的圆是圆心在原点的单位圆。在这些数中哪一个是 F 的倒数

(*A*) A (*B*) B (*C*) C (*D*) D (*E*) E.

18. 设 f 是多项式函数，对一切实数 x 均有

$$f(x^2+1)=x^4+5x^2+3,$$

对一切实数 x，$f(x^2-1)$ 等于

(*A*) x^4+5x^2+1 (*B*) x^4+x^2-3 (*C*) x^4-5x^2+1 (*D*) x^4+x^2+3 (*E*) 不同于(*A*)～(*D*)的多项式。

19. D 是三角形 ABC 的边 CB 上的一点。若 $\angle CAD=\angle DAB=60°$，$AC=3$，$AB=6$，则 AD 的长度是

(*A*) 2 (*B*) 2.5 (*C*) 3 (*D*) 3.5 (*E*) 4.

20. 若 $\mathrm{tg}\alpha$ 和 $\mathrm{tg}\beta$ 是 $x^2-px+q=0$ 的两根，$\mathrm{ctg}\alpha$ 和 $\mathrm{ctg}\beta$ 是 $x^2-rx+s=0$ 的两根，则 rs 必定是

(*A*) pq (*B*) $\frac{1}{pq}$ (*C*) $\frac{p}{q^2}$ (*D*) $\frac{q}{p^2}$ (*E*) $\frac{p}{q}$.

21. 从下列诸数中找出最小的正数，这个数应是

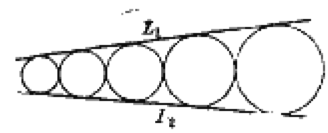
(*A*) $10-3\sqrt{11}$ (*B*) $3\sqrt{11}-10$ (*C*) $18-5\sqrt{13}$ (*D*) $51-10\sqrt{26}$ (*E*) $10\sqrt{26}-51$.

22. 考察两个函数 $f(x)=x^2+2bx+1$ 和 $g(x)=2a(x+b)$，其中变量 x 和常数 a、b 均为实数。每一对这样的实数 (a, b) 可视作 ab-平面上的一点。令 S 是使得 $y=f(x)$ 和 y

$=g(x)$不相交(在 xy-平面上)的(a, b)的集合。S 的面积是

(A) 1 (B) π (C) 4 (D) 4π (E) 无限大。

23. 附图中五圆依次相切，且与直线 L_1 和 L_2 相切。如果最大圆的半径是 18，最小圆的半径是 8，那么中间的一个圆的半径是



(A) 12 (B) 12.5 (C) 13 (D) 13.5 (E) 14。

24. 有多少个互不全等的直角三角形满足以下条件：其周长(以厘米为单位)和面积(以平方厘米为单位)在数值上相等?

(A) 没有 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 无穷多个。

25. 如果 $60^a=3$, $60^b=5$, 那么 $12^{[(1-a-b)/2(1-b)]}$的值是

(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) 3 (E) $\sqrt{12}$。

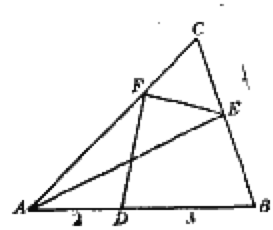
26. 事件 A 发生的概率是 $\frac{3}{4}$，事件 B 发生的概率是 $\frac{2}{3}$。设 p 是 A 和 B 都发生的概率，必定包含 p 的最小区间是

(A) $\left[\frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ (D) $\left[\frac{5}{12}, \frac{2}{3}\right]$ (E) $\left[\frac{1}{12}, \frac{2}{3}\right]$。

27. 在有太阳的时候，一个大球放在水平的地面上。在某一时刻，球的影子伸展到与球和地面接触点相距 10 米处。又在同一时刻，一根一端接触地面且垂直放置的米尺(长 1 米)的影子的长度为 2 米，以米为单位，球的半径是多少?(设阳光是平行的，米尺可看作为一线段)

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $9-4\sqrt{5}$ (C) $8\sqrt{10}-23$ (D) $6-\sqrt{15}$ (E) $10\sqrt{5}-20$。

28. 如图所示的三角形 ABC 的面积是 10。点 D、E、F 与 A、B、C 都不重合，分别在边 AB、BC 和 CA 上，且 $AD=2$, $DB=3$。若三角形 ABE 和四边形 $DBEF$ 有相同的面积，则此面积是

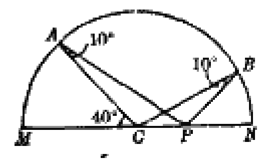


(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$ (E) 不能唯一确定。

29. 点 P 落在给定的边长为 1 的正方形的同一平面上。令正方形的顶点按逆时针方向排列为 A、B、C、D，并令 P 到 A、B、C 的距离分别为 u、v、w。若 $u^2+v^2=u^2$，则 P 到 D 的最大距离是

(A) $1+\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2+\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{2}$ (E) $3+\sqrt{2}$。

30. 如图，在圆心为 C，直径为 MN 的半圆上有不同的两点 A 和 B。P 点在 CN 上，$\angle CAP=\angle CBP=10^\circ$。若 $\overset{\frown}{MA}=40^\circ$，则 $\overset{\frown}{BN}$ 等于



(A) 10° (B) 15° (C) 20° (D) 25° (E) 30°。

解　　答

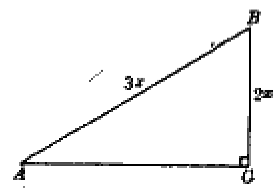
1. [解](E) 对 y^2 解两个方程，得 $y^2=\frac{x}{2}=\frac{x^2}{256}$。由于 $x\neq0$，所以 $x=\frac{256}{2}=128$。

2. [解](B)　问题中的点就是原来的圆C与以P为圆心，3为半径的圆的交点。两个不同的圆的交点最多有两个。

3. [解](A)　p和q不能都是奇数，因为这样r将是大于2的偶质数，这不可能。于是p和q中有一个是2。因为$1<p<q$，所以p是2。

4. [解](D)　作直线BF、BE和BD，得到四个边长为1的等边三角形。(例如，$\triangle FAB$就是等边三角形。这是因为$AF=AB=1$，且$\angle A=60°$) 于是总面积是$4\times\frac{12\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$。

5. [解](D)　如图，$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}$，所以对某个$x>0$，$BC=2x$，$AB=3x$。以及$AC=\sqrt{(AB)^2-(BC)^2}=\sqrt{5}x$，于是$\operatorname{tg}B=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$。



6. [解](C)　根据定义，(关于x的)多项式是形如$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$的表达式，其中各个$a_i(0\leqslant i\leqslant n)$都是常数，$a_n\neq0$。$x$的最高次幂$n$定义为次数。由于

$$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3),$$

所以实际上不必再做乘法就可看出(将右边各因式的次数相加)乘积是六次多项式。

7. [解](B)　设牌价是x元，于是

$$0.1(x-10)=0.2(x-20),$$

即
$$x-10=2x-40,$$

所以
$$x=30.$$

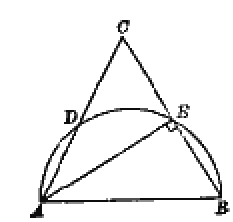
8. [解](A)　$f(-x)=\frac{-x+1}{-x-1}=\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=\frac{1}{f(x)}$。

9. [解](D)　设w是妇女个数，m是男子个数。由题意，对某个x有$w=11x$，$m=10x$；又$34w$是妇女的年龄之和，$32m$是男子的年龄之和。于是全体男女年龄的平均数是

$$\frac{34\times11x+32\times10x}{11x+10x}=\frac{34\times11+32\times10}{21}=\frac{694}{21}=33\frac{1}{21}.$$

注：除了上面一行中最左边的表达式以外，如果恰是11名妇女和10名男子，那么算出的平均数也相同。

10. [解](D)　如图，因为AB是直径，所以$\angle AEB=90°$。于是AE是等边$\triangle ABC$的高。推得$\triangle ABE$是含有30°角的直角三角形，并且$AE=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$。



11. [解](B)　设$w=x-y$，于是已知表达式是$\sin w\cos y+\cos w\sin y=\sin(w+y)=\sin x$。

12. [解](E)　因为$\log_7(\log_3(\log_2x))=0\Longrightarrow\log_3(\log_2x)=1$

$$\Longrightarrow\log_2x=3\Longrightarrow x=2^3=8,$$

所以
$$x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

13. [解](E)　注意到$abc=x^2y^2z^2=x^2c^2$，所以$x^2=\frac{ab}{c}$。同理，$y^2=\frac{ac}{b}$，$z^2=\frac{bc}{a}$，于是

$$x^2+y^2+z^2=\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}.$$

14. [解法一](B)　考虑3、7和13的前若干次幂：

一次幂	3	7	13
二次幂	9	49	169
三次幂	27	343	…7
四次幂	81	…1	…1
五次幂	243	…7	…3

显然，在以上各种情况下，个位数都是每隔四次循环出现一次。如果幂是4的倍数，则个位数是1。设$u(n)$是n的个位数。因为4整除1000，所以

$$u(3^{1001})=u(3^1)=3,\ u(7^{1002})=u(7^2)=9,$$
$$u(13^{1003})=u(13^3)=7.$$

于是$u(3^{1001}\times7^{1002}\times13^{1003})=u(3\times9\times7)=9$。

注：若用同余式，则这种解法的表达可简短得多。

〔解法二〕 无论是$7\times13=91$还是$3^4=81$，它们的幂的个位数都是1，于是$3^{1001}\times7^{1002}\times13^{1003}=3\times13\times81^{250}\times91^{1002}$。它的个位数显然是9。

15. 〔解〕(C) 总和为6的情况可由7种等可能的有序的三数组(1, 2, 3)，(1, 3, 2)，(2, 1, 3)，(2, 3, 1)，(3, 1, 2)，(3,2,1)和(2, 2, 2)得到，因此答案是$\frac{1}{7}$。

16. 〔解〕(D) 设z表示小数点后第1983个数字，则我们可将从小数点后第1个数字到z这个数字所成的这一串数字分成三段，即

$$\underbrace{123456789}_{A}\underbrace{1011\cdots9899}_{B}\underbrace{100101\cdots z}_{C}.$$

A段中有9个数字，B段中有$2\times90=180$个数字，于是C段中有$1983-189=1794$个数字。将1794除以3，得商598，余数为0。于是C段由前598个三位数组成。由于第一个三位数是100（不是101或001），第598个三位数是697，于是$z=7$。

17. 〔解法一〕(C) 把F写成$a+bi$的形式。从图中可以看出$ab>0$，$a^2+b^2>1$，因为

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i,$$

我们可看到F的倒数在第四象限。这是因为上式右边的复数的实部为正，虚部的系数为负，并且该倒数的模是

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2+(-b)^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1,$$

于是只可能是点C。

〔解法二〕 对于任何复数$z\neq0$，$\frac{1}{z}$的幅角是z的幅角的相反数，$\frac{1}{z}$的模是z的模的倒数。将这一结论用于点F，它的倒数必在第四象限，且在单位圆内，故只可能是点C。

18. 〔解法一〕(B) 由于$f(x)$是多项式，$f(x^2+1)$是四次多项式，所以$f(x)$是二次多项式，即$f(x)=ax^2+bx+c$，其中a,b,c为常数，并且

$$f(x^2+1)=x^4+5x^2+3=a(x^2+1)^2+b(x^2+1)+c=ax^4+(2a+b)x+(a+b+c).$$

由于当且仅当两个多项式的对应项的系数相等时，两个多项式相等，于是我们有$a=1$，$2a+b=5$，$a+b+c=3$。解这三个方程得$f(x)=x^2+3x-1$，于是$f(x^2-1)=(x^2-1)^2+3(x^2-1)-1=x^4+x^2-3$。

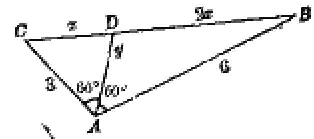
〔解法二〕 将x^4+5x^2+3改写为x^2+1的幂的形式：

$$x^4+5x^2+3=(x^4+2x^2+1)+(3x^2+3)-1=(x^2+1)^2+3(x^2+1)-1.$$

于是如设$w=x^2+1$，则可得$f(w)=w^2+3w-1$。

因此，象上面一样，对一切x有

$$f(x^2-1)=(x-1)^2+3(x^2-1)-1=x^4+x^2-3.$$



(图 1)

19. [解法一](A) 设$AD=y$。由于AD平分$\angle BAC$，所以$\frac{DB}{CD}=\frac{AB}{AC}=2$，于是可设$CD=x$，$DB=2x$(如图1)，对$\triangle CAD$和$\triangle DAB$用余弦定理，得

$$x^2=3^2+y^2-3y,$$

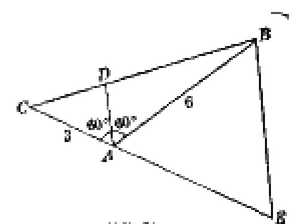
和

$$(2x)^2=6^2+y^2-6y.$$

将第二个方程减去第一个方程的4倍得到

$$0=-3y^2+6y=-3y(y-2).$$

因为$y\neq0$，所以$y=2$。



(图 2)

[解法二] 延长CA到E使$BE\parallel DA$(如图2)，于是$\triangle ABE$是等边三角形。

由于$\triangle BEC\backsim\triangle DAC$，得$\frac{DA}{BE}=\frac{CA}{CE}$，或$\frac{DA}{6}=\frac{3}{9}$，所以$DA=2$。

20. [解法一](C) 由二次方程的根与系数的关系，得$p=\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta$，$q=\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta$，$r=\text{ctg}\alpha+\text{ctg}\beta$，$s=\text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}\beta$。由于

$$\text{ctg}\alpha+\text{ctg}\beta=\frac{1}{\text{tg}\alpha}+\frac{1}{\text{tg}\beta}=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta},$$

以及$\text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}\beta=\frac{1}{\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$，得到$r=\frac{p}{q}$，$s=\frac{1}{q}$，于是$rs=\frac{p}{q^2}$。

[解法二] 一般地如果方程$x^2-px+q=0$有根m和n，那么方程$qx^2-px+1=0$有根$\frac{1}{m}$和$\frac{1}{n}$。这两个方根的根互为倒数，将后一方程的两边除以q，得到$x^2-\frac{p}{q}x+\frac{1}{q}=0$，它也有根$\frac{1}{m}$和$\frac{1}{n}$。所以$r=\frac{p}{q}$，$s=\frac{1}{q}$，$rs=\frac{p}{q^2}$。

21. [解](D) 由于

$$10^2=100>99>(3\sqrt{11})^2,$$
$$18^2=324<325=(5\sqrt{13})^2,$$
$$51^2=2601>2600=(10\sqrt{26})^2,$$

所以只有(A)和(D)是正数。又因为$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$，所以

$$10-3\sqrt{11}=\frac{1}{10+3\sqrt{11}}\approx\frac{1}{20},\quad 51-10\sqrt{26}=\frac{1}{51+10\sqrt{26}}\approx\frac{1}{102}\text{(最小)}.$$

22. [解](B) 显然，能使方程

$$x^2+2bx+1=2a(x+b),$$

或等价的方程

$$x^2+2(b-a)x+(1-2ab)=0,$$

没有实数根x的数组(a,b)满足题设要求，由于二次方程$Ax^2+Bx+C=0$当且仅当判别式B^2-4AC为负时，没有实数根。所以(a,b)的集合s满足条件

$$[2(b-a)]^2-4(1-2ab)<0,$$

即

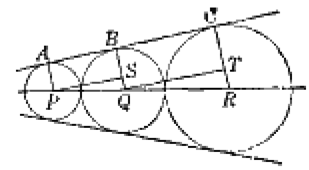
$$a^2+b^2<1.$$

于是s是单位圆(不包括边界)，其面积应为π。

23. [解](A) 我们断言相邻两圆的半径之比为常数，即半径所组成的数列是等比数列，这一比值是$\sqrt[4]{\frac{18}{8}}$，中间一圆的半径为$8\sqrt{\frac{18}{8}}=12$。

这一断言是直觉的，因为对于任何相邻两圆来说，图形看上去都相象，只是大小不同，但这要证明。下图中有三个依次外切的圆，它们的圆心P、Q、R共线，都在两条切线所成的角的平分线上。设A、B、C为切

点，设 PS、QT 为平行于上面一条切线的线段（如图）。于是 $\triangle PQS \backsim \triangle QRT$。如果设 x, y, z 分别是从小到大的半径，那么 $QS = y - x$，$RT = z - y$。于是由 $\frac{QS}{PQ} = \frac{RT}{QR}$ 变为 $\frac{y-x}{x+y} = \frac{z-y}{y+z}$，化简后为 $y^2 = xz$，或 $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$。这一等式说明相邻两圆的半径的比为常数，即我们的断言正确。



24. [解法一](E) 我们将证明，一个三角形的周长和面积之比可以任意改变，只要用一个相似三角形代替原三角形即可。因此在每一种相似的直角三角形中必存在一个直角三角形，其周长(任意长度单位，如厘米)等于面积(任意面积单位)，也就是说，它们的比是 1。由于有无穷多个不相似的直角三角形，所以存在无穷多个不相似的(因此不全等的)直角三角形而其周长等于面积。

设一个任意的直角三角形的两直角边和斜边的长分别为 a、b 和 c（以厘米为单位）。周长(以厘米为单位)与面积(以平方厘米为单位)的比是

$$r = \frac{2(a+b+c)}{ab}.$$

现在考虑边长为 ka, kb, kc 的相似三角形。周长与面积的比为

$$\frac{2(ka+kb+kc)}{(ka)(kb)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2(a+b+c)}{ab} = \frac{r}{k}.$$

只要取 $k = r$，则在新的三角形中周长等于面积。

[解法二] 如果 a 和 b 是直角三角形的两条直角边的长，那么当且仅当

$$\frac{1}{2}ab = a + b + \sqrt{a^2+b^2}$$

时，面积与周长在数值上相等。这是一个二元方程(a、b 为非负实数)。一般地说，这种方程有无穷多组解。而且可以预料，不同的解 (a, b) 可得到不全等的三角形。因此就可相信(E)是正确的。经过完整的分析，可以证明这是正确的，虽然解上述方程(经移项和平方化去根号后)会产生增根，并且满足方程的不同的数对，如 $(6, 8)$ 和 $(8, 6)$ 表示全等的三角形。

25. [解](B) 因 $12 = \frac{60}{5} = \frac{60}{60^b} = 60^{1-b}$，所以

$$12^{(1-a-b)/2(1-b)} = [60^{1-b}]^{(1-a-b)/2(1-b)} = 60^{(1-a-b)/2} = \sqrt{\frac{60}{60^a 60^b}} = \sqrt{\frac{60}{3 \cdot 5}} = 2.$$

26. [解](D) 设 $P(E)$ 为事件 E 发生的概率。根据容斥原理，可以得 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$。所以

$$p = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - P(A \cup B),$$

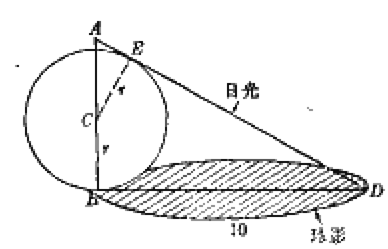
至多有 $P(A \cup B) = 1$，至少有 $P(A \cup B) = \max\{P(A), P(B)\} = \frac{3}{4}$。所以 $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - 1 \leqslant p \leqslant \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$。得(D)。

注：仅且 A 与 B 独立时，$p = \frac{1}{2}$。

27. [解](E) 我们先作所示的图，图中由铅垂面平分球影。由于米尺的影长为 2m，$AB = 5$，因此 $AD = 5\sqrt{5}$。$\triangle CEA$ 相似于 $\triangle DBA$，于是

$$\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AD}，或 \frac{r}{5-r} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

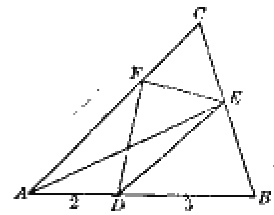
所以 $\sqrt{5}\, r = 10 - 2r$，或 $r = \frac{10}{2+\sqrt{5}} = 10\sqrt{5} - 20$。



28. [解](C) 如图，作直线 DE。由 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDE}$，以及 $S_{DBEF} = S_{\triangle FDE} + S_{\triangle DEB}$，推出 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle FDE}$。

由于这两个三角形有一条公共底 DE，所以该底上的高必相等，也就是说 A 和 F 到直线 DE 的距离相

等,所以 $AF \parallel DE$. 于是利用相似三角形 ABC 和 DBE,得



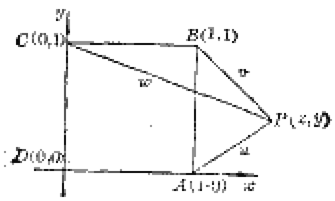
$$\frac{EB}{CB}=\frac{DB}{AB}=\frac{3}{5},$$

所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}=6$.

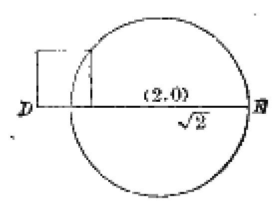
29. [解](C) 设正方形被放在坐标平面内如图 1; D 放在原点使到 D 的距离的代数表达式易于解释. 于是 $u^2+v^2=w^2$ 化为

$$(x-1)^2+y^2+[(x-1)^2+(y-1)^2]=x^2+(y-1)^2.$$

化简后为 $x^2-4x+2+y^2=0$, 即 $(x-2)^2+y^2=2$. 于是 P 的轨迹是圆心为 (2, 0) 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆. 从



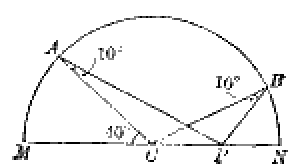
(图 1)



(图 2)

图 2 显然可见圆上到 D 的最远的点是 $E(2+\sqrt{2},0)$.

30. [解法一](C) 如图,在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BCP$ 中, 两边及其中一边的对角对应相等,又因为这两个三角形不全等($\angle CPA\neq\angle CPB$),所以必有 $\angle CPA$ 和 $\angle CPB$ 互补. 由 $\triangle ACP$, 我们计算



$$\angle CPA=180°-10°-(180°-40°)=30°.$$

于是 $\angle CPB=150°$, $\overset{\frown}{BN}\overset{m}{=}\angle PCB=180°-10°-150°=20°$.

[解法二] 因 $\angle CPA=30°$, 分别对 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BCP$ 用正弦定理,得

$$\frac{\sin 10°}{CP}=\frac{\sin 30°}{AC} \text{ 和 } \frac{\sin 10°}{CP}=\frac{\sin\angle CPB}{BC}.$$

因为 $AC=BC$, 于是 $\sin\angle CPB=\frac{1}{2}$. 又因为 $\angle CPB\neq\angle CPA$, 我们有 $\angle CPB=150°$, 于是 $\overset{\frown}{BN}=20°$.

第三十五届美国中学数学竞赛试题(1984年)

1. $\dfrac{1000^2}{252^2-248^2}$ 等于

   (A) 62500 (B) 1000 (C) 500 (D) 250 (E) $\dfrac{1}{2}$.

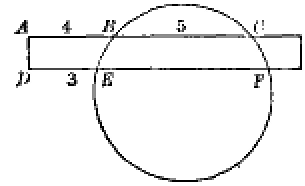
2. 若 x, y 和 $y-\dfrac{1}{x}$ 都不为零，则 $\dfrac{x-\dfrac{1}{y}}{y-\dfrac{1}{x}}$ 等于

   (A) 1 (B) $\dfrac{x}{y}$ (C) $\dfrac{y}{x}$ (D) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$ (E) $xy-\dfrac{1}{xy}$.

3. 设 n 是满足下列条件的最小整数：大于 1，没有小于 10 的质因子，又不是质数．则

   (A) $100<n\leqslant110$ (B) $110<n\leqslant120$ (C) $120<n\leqslant130$ (D) $130<n\leqslant140$ (E) $140<n\leqslant150$.

4. 一矩形与一圆相交如图所示；$AB=4$, $BC=5$, $DE=3$, 则 EF 等于



   (A) 6 (B) 7 (C) $\dfrac{20}{3}$ (D) 8 (E) 9.

5. 满足 $n^{200}<5^{300}$ 的最大整数 n 是

   (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12.

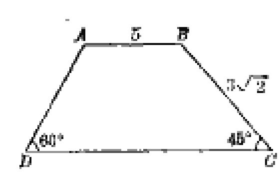
6. 在某学校里，男生是女生的三倍，而女生是教师的九倍．男生、女生和教师的数目分别用字母 b, g 和 t 表示，则男生、女生和教师的总数可表示为

   (A) $31b$ (B) $\dfrac{37}{27}b$ (C) $13g$ (D) $\dfrac{37}{27}g$ (E) $\dfrac{37}{27}t$.

7. 当戴夫(人名)步行去学校时，他平均每分钟 90 步，每步 75 厘米长，他用了 16 分钟到达学校，他的弟弟杰克(人名)，去同样的学校，顺着同样的路线，平均每分钟 100 步，但是他的步长只有 60 厘米．杰克到达学校需用多长时间？

   (A) $14\dfrac{2}{9}$ 分钟 (B) 15 分钟 (C) 18 分钟 (D) 20 分钟 (E) $22\dfrac{2}{9}$ 分钟.

8. 图形 $ABCD$ 是一梯形，$AB\parallel DC$, $AB=5$, $BC=3\sqrt{2}$, $\angle BCD=45°$, $\angle CDA=60°$. DC 的长度是



   (A) $7+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (B) 8 (C) $9\dfrac{1}{2}$ (D) $8+\sqrt{3}$

   (E) $8+3\sqrt{3}$.

9. $4^{16}5^{25}$ 的位数(用十进位制)是

   (A) 31 (B) 30 (C) 29 (D) 28 (E) 27.

10. 在复平面中，位于一个正方形的四个顶点处的四个复数中的三个是 $1+2i$, $-2+i$ 和 $-1-2i$, 第四个是

(A) $2+i$ (B) $2-i$ (C) $1-2i$ (D) $-1+2i$ (E) $-2-i$.

11. 某计算机有一个键是作平方运算的，另一个键是作倒数运算的。开始时，光输入一个数 $x\neq0$，然后轮流地作平方运算与倒数运算各 n 次，最后的结果记为 y。假定此计算机是完全精确的(例如，不会四舍五入，也不会因为位数不够而造成差错)，则 y 等于

(A) $x^{((-2)^n)}$ (B) x^{2n} (C) x^{-2^n} (D) $x^{-(2n)}$ (E) $x^{((-1)^n\cdot 2n)}$.

12. 若数列$\{a_n\}$由 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2n(n\geqslant1)$确定，则 a_{100} 等于

(A) 9900 (B) 9902 (C) 9904 (D) 10100 (E) 10102.

13. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 等于

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (B) $4-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-5$

(D) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})$ (E) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

14. 方程 $x^{\log_{10}x}=10$ 的所有实根之积是

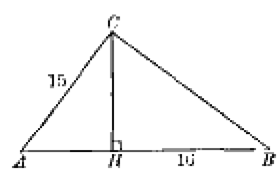
(A) 1 (B) -1 (C) 10 (D) 10^{-1} (E) 不同于(A)～(D)的答案。

15. 若 $\sin 2x\sin 3x=\cos 2x\cos 3x$，则 x 的一个值是

(A) 18° (B) 30° (C) 36° (D) 45° (E) 60°.

16. 函数 $f(x)$对一切实数 x 满足 $f(2+x)=f(2-x)$。若方程 $f(x)=0$ 恰好有四个不同的实根，则这些根之和是

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8.



17. 如图，直角三角形 ABC，斜边为 AB，边 $AC=15$，高 CH 分 AB 成线段 AH 和 HB，$HB=16$，$\triangle ABC$ 的面积是

(A) 120 (B) 144 (C) 150 (D) 216 (E) $144\sqrt{5}$.

18. 在坐标平面内选择一点(x, y)，使得它到 x 轴，y 轴和直线 $x+y=2$ 的距离都相等。则 x 是

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) 1 (E) 不唯一确定。

19. 一只盒子装有 11 只球，球上分别标有号码 1, 2, …11。若随机地同时摸出 6 只球，摸出的球的号码之和是奇数的概率是

(A) $\frac{100}{231}$ (B) $\frac{115}{231}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{118}{231}$ (E) $\frac{6}{11}$.

20. 方程 $|x-|2x+1||=3$ 的不同的根的个数是

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

21. 满足联立方程

$$\begin{cases} ab+bc=44, \\ ac+bc=23, \end{cases}$$

的正整数组(a, b, c)的组数是

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

22. 设 a 和 c 是固定的正数，对每一实数 t，(x_t, y_t)是抛物线 $y=ax^2+tx+c$ 的顶点，对所有的实数 t，顶点(x_t, y_t)的全体构成一个集合，把这个集合画成平面上一个图形，则此图形是

(A) 一条直线 (B) 一条抛物线 (C) 一条抛物线的一部分，但不是全部 (D) 双曲线的一支 (E) 不同于(A)～(D)的答案。

23. $\frac{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ}$ 等于

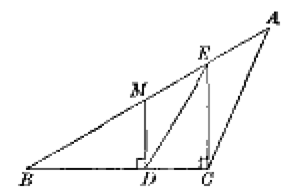
(A) $\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}20^\circ$ (B) $\operatorname{tg}30^\circ$ (C) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}20^\circ)$ (D) $\operatorname{tg}15^\circ$ (E) $\frac{1}{4}\times\operatorname{tg}60^\circ$。

24. 若 a 和 b 是正实数，且方程 $x^2+ax+2b=0$ 和 $x^2+2bx+a=0$ 各有实根，则 $a+b$ 的最小可能值是

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6。

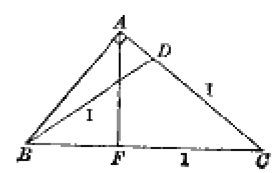
25. 一长方体的所有表面的总面积是 22 平方厘米，所有棱的总长度是 24 厘米。以厘米为单位，长方体内的任一条对角线的长度是

(A) $\sqrt{11}$ (B) $\sqrt{12}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $\sqrt{14}$ (E) 不唯一确定。



26. 如图，在钝角三角形ABC中，$AM=MB$，$MD\perp BC$，$EC\perp BC$。若 $\triangle ABC$ 的面积是 24，则 $\triangle BED$ 的面积是

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 不唯一确定。



27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D、F 分别在 AC，BC 上，且 $AB\perp AC$，$AF\perp BC$，$BD=DC=FC=1$，则 AC 等于

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt[3]{2}$ (D) $\sqrt[3]{3}$ (E) $\sqrt[4]{3}$。

28. 满足 $0<x<y$ 及 $\sqrt{1984}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的不同的整数对(x, y)的个数是

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 7。

29. 对满足$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 的所有的实数对(x, y)，$\frac{y}{x}$ 的最大值应为

(A) $3+2\sqrt{2}$ (B) $2+\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) 6 (E) $6+2\sqrt{3}$。

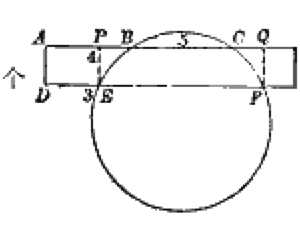
30. 对任何复数 $W=a+bi$，它的模 $|W|$ 定义为实数 $\sqrt{a^2+b^2}$。若 $W=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$，则 $|W+2W^2+3W^3+\cdots+9W^9|^{-1}$ 等于

(A) $\frac{1}{9}\sin 40^\circ$ (B) $\frac{2}{9}\sin 20^\circ$ (C) $\frac{1}{9}\cos 40^\circ$ (D) $\frac{1}{18}\cos 20^\circ$ (E) 不同于(A)～(D)的答案。

解　答

1. [解](C) $(252+248)(252-248)=500\times 4$。

2. [解](B) 由 $y-\frac{1}{x}\neq 0$，得 $xy-1\neq 0$ ∴ $\frac{xy-1}{y}\cdot\frac{x}{xy-1}=\frac{x}{y}$。



3. [解](C) 根据所给条件，可将题目等价变换成下面问题：试求一个最小合数，使得它的任一个质因数都不小于 11，容易求得此数为 121。

4. [解](B) 过 E、F 点分别向 AC 作垂线，垂足为 P、Q，则得

$CQ=PB=AB-DE=4-3=1$，

∴ $EF=PQ=PB+BC+CQ=7$。

5. [解](D)　由于 $n^{200}<5^{300}=(5^{\frac{3}{2}})^{200}=(\sqrt{125})^{200}$，从而问题归结为：求满足 $n<\sqrt{125}$ 的最大整数 n 为多少？不难得到 $n=11$。

6. [解](B)　根据题意，得

$$\begin{cases} b=3g, \\ g=9t. \end{cases}$$

$$\therefore\quad b+g+t=b+\frac{b}{3}+\frac{g}{9}=b+\frac{1}{3}b+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}b=\frac{37}{27}b.$$

7. [解](C)　因为戴夫和杰克去学校的路线长为

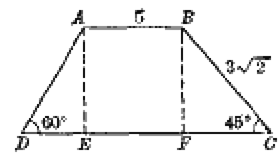
$$16\times 90\times 75=108000(\text{厘米}).$$

所以杰克到达学校所需时间是

$$\frac{108000}{60}\div 100=18(\text{分钟}).$$

8. [解](D)　过 A、B 分别向 DC 作垂线，垂足为 E、F，则

$$AE=BF=FC,\ AB=EF.$$



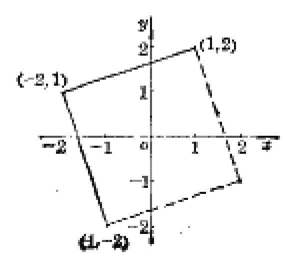
在 $\triangle BFC$ 中，$BF=FC=3\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ=3$。

在 $\triangle ADE$ 中，$DE=AE\cdot\text{ctg}60^\circ=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$。

$$\therefore\quad DC=DE+EF+FC=\sqrt{3}+5+3=8+\sqrt{3}.$$

9. [解](D)　$\because$　$4^{16}\times 5^{25}=2^{32}\times 5^{25}=2^{7}\times 2^{25}\times 5^{25}=128\times 10^{25}$，而 10^{25} 为26位数，$\therefore$　128×10^{25} 为28位数。

10. [解](B)　如图，点$(1,2)$和点$(-1,-2)$关于原点O对称，即O点为该正方形的中心。因此第四点必和点$(-2,1)$关于原点O点对称。可得第四点为$(2,-1)$，即第四个复数是 $2-i$。



11. [解](A)　当 $n=1$ 时，　$y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$；

当 $n=2$ 时，　$y=\frac{1}{(x^{-2})^2}=x^4$；

当 $n=3$ 时，　$y=\frac{1}{(x^4)^2}=x^{-8}$；

当 $n=4$ 时，　$y=\frac{1}{(x^{-8})^2}=x^{16}$。

于是，当 n 为奇数时，　$y=x^{-2^n}$；

当 n 为偶数时，　$y=x^{2^n}$。

综合奇偶数的情形，得 $y=x^{((-2)^n)}$。

12. [解](B)　由递推关系 $a_{n+1}=a_n+2n(n\geqslant 1)$ 可得

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n&=2n, \\ a_n-a_{n-1}&=2(n-1), \\ a_{n-1}-a_{n-2}&=2(n-2), \\ &\cdots\cdots \\ a_3-a_2&=2\times 2, \\ a_2-a_1&=2\times 1. \end{aligned}$$

将上面 n 个式子相加得

$$a_{n+1}-a_1=2(1+2+\cdots+n-1+n)=2\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n,$$

即　　$a_{n+1}=n(1+n)+2$。

于是　　$a_{100}=a_{99+1}=99\times 100+2=9902$。

13. [解](A) 原式 $=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$。

14. [解](A) ∵ $x>0$, ∴ $\lg x\cdot\lg x=\lg 10=1$, 即 $\lg x=\pm 1$, ∴ $x_1=10$, $x_2=\dfrac{1}{10}$。

15. [解](A) 由 $\sin 2x\cdot\sin 3x=\cos 2x\cdot\cos 3x$, 得

$$\cos 2x\cdot\cos 3x-\sin 2x\cdot\sin 3x=0,$$

即
$$\cos(2x+3x)=\cos 5x=0.$$

于是
$$5x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \ (k\in J),$$

所以
$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}=18^\circ+36^\circ\cdot k.$$

当 $k=0$ 时, $x=18^\circ$。

16. [解](E) 如果 $r_1=2+a$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根, 那么, 根据已知条件 $f(2+x)=f(2-x)$, 得 $r_2=2-a$ 也是方程 $f(x)=0$ 的一个根。

由此可见,所有不同的根是在 $x=2$ 的左右成对出现,并且关于 $x=2$ 对称,(如果 $r=2$ 是方程的根, 那么值 $r=2$ 只能与自身对称)。

这样,每一对根的和是4. 同时根据 $f(x)=0$ 恰好有四个不同的根, 所以2不是方程的根(否则 $f(x)=0$ 只有三个不同的根与题意矛盾)。

因此恰好有两对根,且所有根之和是8。

17. [解法一](C) ∵ $CH^2=15^2=AH\cdot AB=AH(AH+16)$,

$$AH^2+16AH-15^2=0,$$

即
$$(AH-9)(AH+25)=0,$$

$$\therefore\ AH=9.$$

而
$$BC^2=HB\cdot BA=HB(HB+HA)$$
$$=16\times(16+9)=16\times 25,$$
$$\therefore\ BC=20.$$

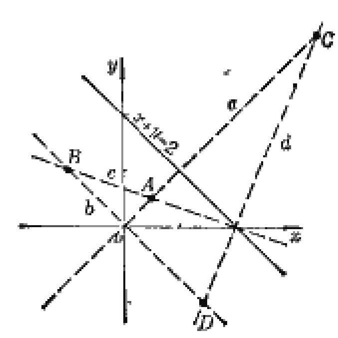
于是
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 15\times 20=150.$$

[解法二] $CH^2=AH\cdot HB=9\times 16$, $CH=12$,

$$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}(9+16)\times 12=150.$$

18. [分析] 这是一道基本轨迹题。主要利用"到定角的两边距离相等的点的轨迹, 是这个角的平分线"这一基本命题,及其角的平分线方程的求法。

[解法一](E) 要使得到两相交直线等距的点,此点必须在两相交直线的两组对角的角平分线上。于是, 到 x 轴和 y 轴等距的点 (x, y), 必须在直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上,(如图中的虚线 a 和 b)。



然而到 x 轴和直线 $x+y=2$ 等距的点 (x, y) 必须在它的交角的平分线上,则有

$$\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|y|}{1},$$

即
$$x+y-2=\pm\sqrt{2}y.$$

因此,到 x 轴和直线 $x+y=2$ 等距的点 (x, y) 必须在过点 $(2, 0)$ 的直线 $x+(1+\sqrt{2})y-2=0$ 或 $x+(1-\sqrt{2})y-2=0$ 上(图中的虚线 c 和 d)。这样, 有四个点同时在虚线 a, b, c 和 d 上。这四个点的 x 轴坐标, 按图中 A, B, C, D 的次序为 $2-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}$, 所以 x 不是唯一的。

［解法二］ 直线 $x+y=2$ 和坐标轴确定一个三角形。这三角形有一个内切圆和三个旁切圆，且一个内切圆的圆心和三个旁切圆的圆心，各自都满足到 x 轴、y 轴和 $x+y=2$ 直线等距的条件，因此有四个点，且它们的 x 坐标是全不相同的，所以 x 不唯一。

19. ［解］(D) 根据奇数个奇数之和为奇数这一性质知，要使摸出的6只球的号码之和是奇数，那么在这6只球中，只能有1只标号为奇数的球，$C_6^1 \cdot C_5^5=6$；或者有3只标号为奇数的球，$C_6^3 \cdot C_5^3=200$；或者有5只标号为奇数的球，$C_6^5 \cdot C_5^1=30$。又从11只球中随机地同时摸出6只球有 $C_{11}^6=462$。因此，摸出的球的号码之和是奇数的概率是

$$\frac{6+200+30}{462}=\frac{118}{231}.$$

20. ［解］(C) 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，原方程无解。

若 $x>-\frac{1}{2}$，则原方程为

$$|x-(2x+1)|=3, \text{ 即 } |x+1|=3.$$

∴ $x_1=2,\ x_2=-4$(舍去)。

若 $x<-\frac{1}{2}$，则原方程为

$$|x+2x+1|=3, \text{ 即 } |3x+1|=3.$$

$$\therefore \quad x_3=\frac{2}{3}(\text{舍去}),\ x_4=-\frac{4}{3}.$$

因此，原方程的解为 $x=2,\ x=-\frac{4}{3}$。

21. ［解］(C) 由方程 $ac+bc=23$，得 $(a+b)\cdot c=23=1\times 23$。

∵ a, b, c 为正整数， ∴ $c=1$ 且 $a+b=23$。

将 $c=1$ 和 $a=23-b$ 代入方程 $ab+bc=44$，得

$$(23-b)b+b=44,$$

即

$$(b-2)(b-22)=0.$$

∴ $b_1=2,\ b_2=22$。

从而得

$$a_1=21,\ a_2=1.$$

故满足联立方程的正整数组 (a, b, c) 为 $(21, 2, 1)$ 和 $(1, 22, 1)$。

22. ［解］(B) 根据抛物线顶点的坐标公式，可得

$$\begin{cases} x_t=-\dfrac{t}{2a}, \\ y_t=\dfrac{4ac-t^2}{4a}. \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

消去参数 t，整理后得

$$y_t=-ax_t^2+c.$$

由于 a 和 c 是固定的正数，因此所求轨迹是一条以 $(0, c)$ 为顶点，开口向下的抛物线。

23. ［解］(D) 利用和差化积公式可得

$$\frac{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ}=\frac{2\sin 15^\circ\cdot\cos 5^\circ}{2\cos 15^\circ\cdot\cos 5^\circ}=\operatorname{tg}15^\circ.$$

24. ［解］(E) 由题意，得 $a^2-8b\geqslant 0$ 和 $4b^2-4a\geqslant 0$，即 $a^2\geqslant 8b$ 且 $b^2\geqslant a$。

由于 a 和 b 是正实数，因此

$$a^2b^2\geqslant 8ab, \text{ 即 } ab\geqslant 8.$$

以上各式等号仅在 $a^2=8b$ 且 $b^2=a$，也就是 $b=2,\ a=4$ 时成立，故得 $a+b$ 的最小可能值为6。

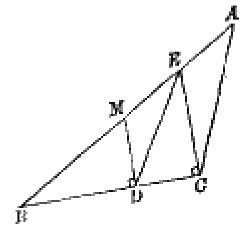
25. ［解］(D) 设这长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，则

$$2(ab+bc+ca)=22 \text{ 及 } 4(a+b+c)=24,$$

$$2ab+2bc+2ca=22 \text{ 及 } a+b+c=6.$$

于是，长方体内的任一条对角线的长度等于

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-(2ab+2bc+2ca)}=\sqrt{14}(\text{厘米}).$$



26. [解](B)　如图，由 $MD\perp BC$，$EC\perp BC$，得 $\triangle BMD\backsim\triangle BEC$。

$$\therefore\quad BM:BE=BD:BC,$$

$$BE\cdot BD=BM\cdot BC.$$

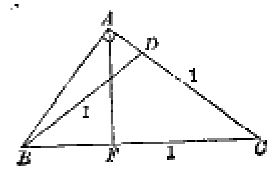
$$\because\quad AM=MB,\ S_{\triangle ABC}=24,$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}(AM+MB)\cdot BC\sin\angle ABC,$$

即

$$MB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=24.$$

于是　$S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}BE\cdot BD\cdot\sin\angle EBD=\frac{1}{2}\cdot BM\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=12.$



27. [解](C)　如图，设 $AC=x$，$\angle DCF=\theta$，则

$$\angle CBD=\theta,\ \angle ADB=2\theta.$$

$\because\quad \cos\theta=\frac{1}{x},\ \cos 2\theta=x-1,\qquad \because\quad 2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$

$$\therefore\quad 2\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=x-1,$$

即

$$2-x^2=x^3-x^2,$$

解得

$$x=\sqrt[3]{2}.$$

28. [解法一](C)　1984 的质因数分解是 $2^6\times31$。

根据题意知：$0<x<1984$，则　由　$(\sqrt{y})^2=(\sqrt{1984}-\sqrt{x})^2$，得

$$y=1984+x-2\sqrt{1984x}.$$

当且仅当 $1984x$ 是完全平方数时，y 是整数。也就是说，当且仅当 x 具有 $31t^2$ 形式时，$1984x$ 是完全平方数。　$\because\quad x<1984,\quad \therefore\quad 1\leqslant t\leqslant7.$

当 $t=1, 2, 3$ 时，得整数对分别为

$$(31,\ 1519),\ (124,\ 1116)\text{ 和 }(279,\ 775).$$

当 $t>3$ 时，$y\leqslant x$（不合题意）。因此，不同的整数对的个数是 3。

[解法二]　$\because\quad 1984=2^6\times31,$

$$\therefore\quad 8\sqrt{31}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

由此可知，x 必须具有 $31t^2$ 形式，y 必须具有 $31k^2$ 形式，并且 $t+k=8$（t，k 均为正整数）。

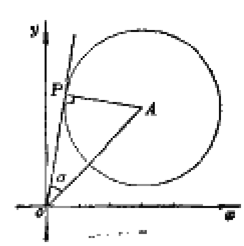
因为 $0<x<y$，所以 $t<k$。

当 $t=1$，$k=7$ 时，得 $(31,\ 1519)$；

当 $t=2$，$k=6$ 时，得 $(124,\ 1116)$；

当 $t=3$，$k=5$ 时，得 $(279,\ 775)$。

因此不同整数对的个数为 3。



29. [分析]　此题实际上是求过原点，且和已知圆相切的直线斜率的最大值，一般可采用如下两种解法。

[解法一](A)　如图所示 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 是一个圆的方程。

设 $\angle AOP=\alpha$，于是要求 $\frac{y}{x}$ 的最大值，只需求 $\operatorname{tg}(\alpha+\angle xOA)$ 即可。

因为 A 的坐标为 $(3, 3)$，所以 $\angle xOA=45°$。

在直角三角形 AOP 中，$OA=\sqrt{18}$，$AP=\sqrt{6}$。

$$\therefore\quad OP=\sqrt{(OA)^2-(AP)^2}=2\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AP}{OP}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由上可得 $\mathrm{tg}(\alpha+45^\circ)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+1}{1-\mathrm{tg}\alpha}=3+2\sqrt{2}$，即为所求 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值。

[解法二] 设过原点且和已知圆相切的直线方程为 $y=mx$，解联立方程

$$\begin{cases} y=mx, \\ (x-3)^2+(y-3)^2=6, \end{cases}$$

得
$$(x-3)^2+(mx-3)^2=6,$$
即
$$(m^2+1)x^2-6(m+1)x+12=0.$$

因为直线和圆相切，也就是说上述方程有等根。所以方程的判别式等于零，即

$$36(m+1)^2-48(m^2+1)=0.$$

从而求得斜率 m 的最大值是 $3+2\sqrt{2}$。

30. [证明](B) 事实上，本题也不难推广到 n 这更一般的情况："若 n 是大于 1 的整数，且 $W=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，则 $|W+2W^2+\cdots+nW^n|^{-1}=\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$"。这里把 $n=9$ 作为它的一个特例，给予证明：

设 $S=W+2W^2+\cdots+nW^n$，

$$SW=W^2+\cdots+(n-1)W^n+nW^{n+1},$$
$$S(1-W)=W+W^2+\cdots+W^n-nW^{n+1}.$$
$$\because\quad W\neq1,\ n>1,$$
$$\therefore\quad S(1-W)=\frac{W^{n+1}-W}{W-1}-nW^{n+1}.$$

由棣莫佛定理 $W^n=1$。

于是
$$S(1-W)=-nW,\quad \frac{1}{S}=\frac{W-1}{nW},\quad \frac{1}{|S|}=\frac{|W-1|}{n|W|}.$$
$$\because\quad |W|=1,\quad \therefore\quad \frac{1}{|S|}=\frac{|W-1|}{n}.$$

因为 1 与 W 是位于单位圆内接正 n 边形上的相邻的顶点，所以 $|W-1|$ 是单位圆内接正 n 边形的边长，即

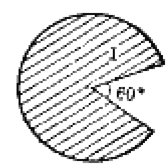
$$|W-1|=2\sin\frac{\pi}{n}.$$

从而证得 $\dfrac{1}{|S|}=\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$，即 $|S|^{-1}=\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$。当 $n=9$ 时，$|W+2W^2+\cdots+9W^9|^{-1}=\dfrac{2}{9}\sin 20^\circ$。

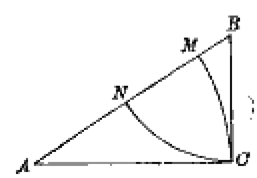
第三十六届美国中学数学竞赛试题(1985年)

1. 若 $2x+1=8$，则 $4x+1=$
(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19.

2. 在一种游戏中，图中的阴影部分是一个"畸形怪物"，它是半径为1厘米的圆的一个扇形，缺掉的部分(怪物的嘴)的中心角是60°。这怪物的周长(以厘米为单位)是
(A) $\pi+2$ (B) 2π (C) $\frac{5}{3}\pi$ (D) $\frac{5}{6}\pi+2$ (E) $\frac{5}{3}\pi+2$.



3. 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中，两直角边为5和12。分别以 A 为中心，12为半径；以 B 为中心，5为半径划弧，交斜边于 M 和 N，则 MN 的长度是
(A) 2 (B) $\frac{13}{5}$ (C) 3 (D) 4 (E) $\frac{24}{5}$.



4. 一大袋硬币，其中有一分，十分，二十五分三种。十分硬币的枚数是一分硬币的两倍，二十五分硬币的枚数是十分硬币的三倍，袋中钱的总数可能是($是元的记号)
(A) \$306 (B) \$333 (C) \$342 (D) \$348 (E) \$360

5. 从和式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ 中，必须除去哪些项，使得余下的项的和等于1?
(A) $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{1}{12}$
(D) $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{1}{10}$.

6. 在男女生合班的一个班级中，挑选一名学生作为班级代表。每个学生都等可能地可以被选上，并且选到男生的概率是选到女生的概率的 $\frac{2}{3}$。男生数对男女生总数的比是
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{2}{3}$.

7. 在有些计算机语言(例如APL)中，当代数式中没有括号时，运算是从右到左进行的，所以，在上述语言中，$a\times b-c$ 和通常的代数记法中的 $a(b-c)$ 一样，若在上述语言中，计算 $a\div b-c+d$，则用通常的代数记法，其结果将是
(A) $\frac{a}{b}-c+d$ (B) $\frac{a}{b}-c-d$ (C) $\frac{d+c-b}{a}$
(D) $\frac{a}{b-c+d}$ (E) $\frac{a}{b-c-d}$.

8. 设 a, a', b, b' 是实数，且 a 和 a' 不为零。$ax+b=0$ 的解小于 $a'x+b'=0$ 的解当且仅当
(A) $a'b<ab'$ (B) $ab'<a'b$ (C) $ab<a'b'$
(D) $\frac{b}{a}<\frac{b'}{a'}$ (E) $\frac{b'}{a'}<\frac{b}{a}$.

9．将奇正数，1，3，5，7，…，排成五列，按右表的格式排下去。1985 所在的那列，从左数起是

(*A*) 第一列 (*B*) 第二列

(*C*) 第三列 (*D*) 第四列

(*E*) 第五列。

	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
	33	35	37	39
47	45	43	41	
	49	51	53	55
·	·	·	·	
	·	·	·	·
·	·	·	·	
	·	·	·	·

10．任意的一个圆和 $y=\sin x$ 的图象相交的交点

(*A*) 至多 2 点 (*B*) 至多 4 点 (*C*) 至多 6 点

(*D*) 至多 8 点 (*E*) 可以多于 16 点。

11．将词 CONTEST 中的字母重新排列，使开头两个字母是元音，有多少不同的排法？（例如，OETCNST 是一种这样的排列，但 OTETSNC 就不是）

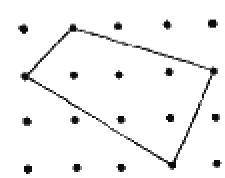
(*A*) 60 (*B*) 120 (*C*) 240 (*D*) 720 (*E*) 2520。

12．设 p，q 和 r 是三个不同的质数，1 不认为是质数。下列哪一个数是最小的含有因子 $n=pq^2r^4$ 的正的完全立方数？

(*A*) $p^8q^8r^8$ (*B*) $(pq^2r^2)^3$ (*C*) $(p^2q^2r^2)^3$ (*D*) $(pqr^2)^3$ (*E*) $4p^3q^3r^3$。

13．在一块钉板上，水平线和垂直线上相邻两钉的距离都是一个单位。一根橡皮筋紧扣在 4 个钉上，构成一个四边形，如图所示，它的面积（平方单位）是

(*A*) 4 (*B*) 4.5 (*C*) 5 (*D*) 5.5 (*E*) 6。



14．一凸多边形恰好有三个内角是钝角。这样的多边形的边数的最大值是

(*A*) 4 (*B*) 5 (*C*) 6 (*D*) 7 (*E*) 8。

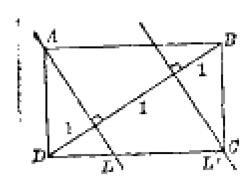
15．若 a 和 b 是正数，且 $a^b=b^a$，$b=9a$，则 a 的值是

(*A*) 9 (*B*) $\frac{1}{9}$ (*C*) $\sqrt[9]{9}$ (*D*) $\sqrt[3]{9}$ (*E*) $\sqrt[4]{3}$。

16．若 $A=20°$，$B=25°$，则 $(1+\text{tg}A)(1+\text{tg}B)$ 的值是

(*A*) $\sqrt{3}$ (*B*) 2 (*C*) $1+\sqrt{2}$ (*D*) $2(\text{tg}A+\text{tg}B)$

(*E*) 不同于(*A*)～(*D*)的答案。



17．矩形 $ABCD$ 的对角线 DB 被过 A 和 C 点，且垂直于 DB 的两条平行直线 L 和 L' 分成长度都为 1 的三部分，$ABCD$ 的面积（四舍五入到一位小数）是

(*A*) 4.1 (*B*) 4.2 (*C*) 4.3 (*D*) 4.4 (*E*) 4.5。

18．六只袋子分别地装有 18，19，21，23，25 和 34 粒弹子，一只袋子装的全是有缺口的弹子，其他五只袋子不含有有缺口的弹子，珍妮取了三只袋子，而乔治取了另外两只袋子，剩下的那袋装的是有缺口的弹子，若珍妮得到的弹子总数比乔治多一倍，则有缺口的弹子有几粒？

(*A*) 18 (*B*) 19 (*C*) 21 (*D*) 23 (*E*) 25。

19．考察 $y=Ax^2$ 和 $y^2+3=x^2+4y$ 的图象，其中 A 是正的常数，x 和 y 是实变量，两个图象有多少个交点？

(*A*) 恰好 4 个 (*B*) 恰好 2 个

(*C*) 至少一个，但是交点个数随 A 取不同的正值而变化

(*D*) 至少对 A 的一个正值，交点个数是零

(E) 不同于$(A)\sim(D)$的答案.

20. 一个木制的立方体,棱长为 n 个单位(n 是大于 2 的整数),表面全涂上黑色,用刀片平行于立方体的各个面,将它切成 n^3 个棱长为单位长度的小立方体,若恰有一个面涂黑色的小立方体的个数,等于没有一面涂黑色的小立方体的个数,则 n 是

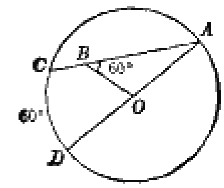
(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8　(E) 不同于$(A)\sim(D)$的答案.

21. 有多少个整数 x 满足方程$(x^2-x-1)^{x+2}=1$?

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　(E) 不同于$(A)\sim(D)$的答案.

22. 如图,在圆心为 O 的圆中,AD 是直径,ABC 是弦,$BO=5$ 且 $\angle ABO \stackrel{\frown}{=} \overset{\frown}{CD}=60^\circ$,则 BC 的长度是

(A) 3　(B) $3+\sqrt{3}$　(C) $5-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 5　(E) 不同于$(A)\sim(D)$的答案.



23. 若 $x=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. 其中 $i^2=-1$, 则下列哪个式子是不正确的?

(A) $x^5+y^5=-1$　(B) $x^7+y^7=-1$　(C) $x^9+y^9=-1$

(D) $x^{11}+y^{11}=-1$　(E) $x^{13}+y^{13}=-1$.

24. 随机地选取一个非零的数字,其选取方式使得取到数字 d 的概率是 $\log_{10}(d+1)-\log_{10}d$. 取到数字 2 的概率恰好是所取数字包含在下列某个集合中的概率的$\dfrac{1}{2}$,这个集合是

(A) $\{2, 3\}$　(B) $\{3, 4\}$　(C) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$　(D) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$

(E) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

25. 某长方体的体积是 8 立方厘米,它的全面积是 32 平方厘米。并且长、宽、高成等比数列. 这长方体的所有棱的长度之和(以厘米为单位)是

(A) 28　(B) 32　(C) 36　(D) 40　(E) 44.

26. 求使得 $\dfrac{n-13}{5n+6}$ 是一个非零的可约分数的最小正整数 n

(A) 45　(B) 68　(C) 155　(D) 226　(E) 不同于$(A)\sim(D)$的答案.

27. 一个数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$, 定义为:

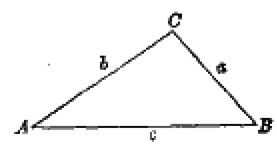
$$x_1=\sqrt[3]{3},\qquad x_2=(\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{3}}$$
$$x_n=(x_{n-1})^{\sqrt[3]{3}}\qquad (n>1)$$

使 x_n 是整数的最小的 n 是

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 9　(E) 27.

28. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=3\angle A$, $a=27$, $c=48$, 则 b 是

(A) 33　(B) 35　(C) 37　(D) 39　(E) 不唯一确定.



29. 在十进位制表示中,整数 a 是由 1985 个数字 8 组成,整数 b 是由 1985 个数字 5 组成,则整数 $9ab$ 的各位数字(也是十进位制表示)之和是

(A) 15880　(B) 17856　(C) 17865　(D) 17874　(E) 19851.

30. 设$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数,则方程

$$4x^2-40[x]+51=0$$

的实数解的个数是

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4。

解 答

1. [解](A) $4x+1=2(2x+1)-1=2\times8-1=15$。

2. [解](E) 这怪物的周长是

$$\frac{5}{6}(2\pi r)+2r=\frac{5}{3}\pi+2。$$

3. [解](D) $BC=BN=5$, $AC=AM=12$, 则

$$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13。$$

$$\therefore \quad MN=BN-BM=BN-(AB-AM)=4。$$

4. [解](C) 设P为一分硬币的枚数,A为袋中钱的总数,则

$$A=P+10(2P)+25(6P)=171P。$$

因为备选答案中只有(C)是171的倍数,所以袋中钱的总数可能是\$342。

5. [解](E) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}$。 因为 $60+30+20+10=120$,所以必须除去$\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$和$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$两项,得余下的项的和等于1。

6. [解](B) 设男生数和女生数分别为b和g,则

$$\frac{b}{b+g}=\frac{\frac{2}{3}g}{\frac{5}{3}g}=\frac{2}{5}。$$

7. [解](E) 根据运算从右到左进行。首先,得$c+d$,然后由b减去$c+d$,得$b-c-d$。最后,a除以$b-c-d$,得

$$\frac{a}{b-c-d}。$$

注:事实上,本题也可以用加括号的方法,即

$$a\div[b-(c+d)], \quad \therefore \quad \frac{a}{b-c-d}。$$

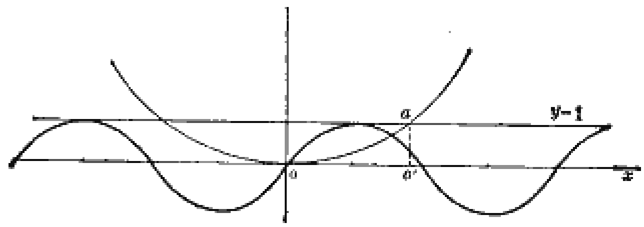
8. [解](E) $ax+b=0$的解是$-\frac{b}{a}$, $a'x+b'=0$的解是$-\frac{b'}{a'}$。根据题意,得$-\frac{b}{a}<-\frac{b'}{a'}$,即$\frac{b'}{a'}<\frac{b}{a}$。

9. [解法一](B) 由表格可知,每行有四个正奇数,而$1985=4\times496+1$。因此1985是第497行的第一个数。而奇数行的第一个数位于第二列,偶数行的第一个数位于第一列,所以从左数起,1985在第二列。

[解法二] 观察第一列上的所有数的值是由$16n-1$组成,$n=1,2,\cdots$。而对于同样的n,在$16n-1$的每一个值的下面一行的第一个数是$16n+1$,并且这些数都出现在第二列中,因为$1985=16\times124+1$,所以1985出现在第二列中。

10. [解](E) 作一个圆和x轴相切于原点O,圆心为O',以及函数$y=\sin x$的图象,如下图所示。

考察夹在直线$y=1$和x轴之间的一段圆弧,这时,不仅圆同正弦函数$y=\sin x$的图象相交,而且圆和直线$y=1$相交于点a,设点a在x轴上的射影为a'。当圆心O'在y轴上离原点O越来越远(即圆的半径越来越大)时,此时,该圆和直线$y=1$的交点a在x轴上的射影a'相应地离原点越来越远,这时圆和$y=\sin x$的图象相交的交点也就越来越多,根据圆的任意性以及函数$y=\sin x$的周期性。得到这样的交点可达无限个。



11. [解](B) 这是一道有附加条件的排列题，且五个辅音字母的排列是有重复的全排列。

因为在"CONTEST"七个字母中有两个元音字母O和E，并且只能把它们放在词的开头两个位置上，因此，对于元音字母的排列顺序有2(种)。

其次，考虑五个辅音字母，如果它们都是相异的，那么它的排列顺序有$5!=120$(种)。但是，在这五个辅音字母中有两个T，因此，五个不尽相异辅音字母的全排列顺序有

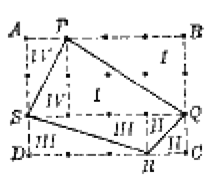
$$\frac{5!}{2!}=60(\text{种}).$$

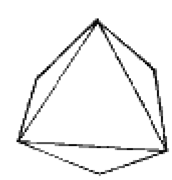
从而CONTEST中的字母重新排列，且开头两个字母是元音的不同的排列顺序共有$2\times60=120$(种)。

12. [解](D) 如果$n=pq^2r^4$是立方数C的一个因子，那么在质因数分解中，C必须有p，q和r。此外，p，q和r的指数必须是3的倍数，并且它们分别必须至少和1，2，4一样大。这样$p^3q^3r^6=(pqr^2)^3$是最小的含有因子$n=pq^2r^4$的正的完全立方数。

13. [解](E) 由图可知，所构成的四边形$PQRS$的面积是矩形$ABCD$的面积的一半，即

$$\frac{1}{2}\times3\times4=6.$$





14. [解](C) 对任意凸n边形，它的内角的和是$(n-2)\cdot180°$。如果一个凸n边形恰好有三个内角是钝角，那么剩下的$n-3$个内角的每一个都不会超过$90°$，而三个钝角小于$3\times180°$。因此

$$(n-2)\times180°<(n-3)\times90°+3\times180°,$$

$$2(n-2)<n-3+6,$$

$$n<7.$$

可见$n=6$是可能的，将一个等边三角形变成如图所示。

15. [解](E) $(a^b)^{\frac{1}{a}}=(b^a)^{\frac{1}{a}}$，并将$b=9a$代入上式，得$a^9=9a$。

$$\because\ a\neq0,\quad\therefore\ a^8=9,\ a=9^{\frac{1}{8}}=\sqrt[4]{3}.$$

16. [解](B) $\because\ A+B=45°$，

$$\therefore\ 1=\operatorname{tg}45°=\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B},$$

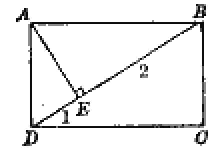
$$1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B$$

$$1=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

因此 $$(1+\operatorname{tg}A)(1+\operatorname{tg}B)=1+\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=2.$$

17. [解](B) 如图，

∵ $AE^2=DE\cdot EB=2$， ∴ $AE=\sqrt{2}$.



因为矩形 $ABCD$ 的面积是三角形 ABD 的面积的两倍，所以该矩形的面积是

$3\cdot AE=3\sqrt{2}\approx 4.2$.

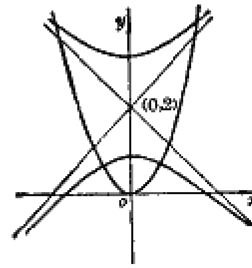
18. [解](D) 根据题意，珍妮得到的弹子总数比乔治多一倍，因此珍妮和乔治两人弹子的总数必须被3整除。就是说，140粒弹子和有缺口的弹子两者的差必须被3整除。对给出六个数中只有23有这个性质。所以有23粒有缺口的弹子。剩下的弹子，对于珍妮来说有 $19+25+34=78$，对于乔治来说有 $18+21=39$.

19. [解法一](A) 将方程 $y^2+3=x^2+4y$ 改写成

$$(y-2)^2-x^2=1,$$

它的图象是双曲线，且中心是 $(0,2)$，顶点分别是 $(0,1)$ 和 $(1,3)$，渐近线方程是 $y=2\pm x$.

对于所有 A 的正值，$y=Ax^2$ 是一条开口向上，顶点在原点的抛物线，如图所示。



因此，双曲线的下面一支和抛物线有两个不同的交点。

双曲线的上面一支的方程是

$$y=2+\sqrt{x^2+1}.$$

对于任给正数 A，如果 $|x|$ 足够大，那么

$$Ax^2>2+\sqrt{x^2+1}\approx 2+x.$$

因为当 $x=0$ 时，$Ax^2<2+\sqrt{x^2+1}$，所以对于任给 A 的正数值，抛物线和双曲线的上面一支也必定相交于两个不同的点，因此两个图象恰好有4个交点。

[解法二] 对于方程组

$$\begin{cases} y=Ax^2, & ① \\ y^2+3=x^2+4y. & ② \end{cases}$$

首先，将②式乘 A，然后将①式代入②式，消去 Ax^2 得

$$Ay^2-(4A+1)y+3A=0, \quad ③$$

因为上述每步都是可逆的，所以①和③式所成的方程组与①和②所成的方程组同解。

于是，利用求根公式，求得方程③的解是

$$y=\frac{4A+1\pm\sqrt{(4A+1)^2-12A^2}}{2A}. \quad ④$$

因为对于 $A>0$，③式中的判别式是正的，所以方程③有两个不同的实根，又因为③式中的常数项是正的，并且一次项 y 的系数是负的，所以这两个根必须都是正的，因此，方程③恰好有两个不同的正根，不妨设 y_1 和 y_2，将 y_1 和 y_2 分别代入①式，得 $x=\pm\sqrt{\frac{y_1}{A}}$ 和 $x=\pm\sqrt{\frac{y_2}{A}}$. 也就是说，对于任何 $A>0$，方程组恰好有4个不同的解：

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{y_1}{A}}, \\ y=y_1; \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{y_1}{A}}, \\ y=y_1; \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{\frac{y_2}{A}}, \\ y=y_2; \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{y_2}{A}} \\ y=y_2. \end{cases}$$

20. 解(D) 这 n^3 个棱长为单位长度的小立方体可分成下面四类：

三面涂黑色的小立方体，其个数为8；

二面涂黑色的小立方体，其个数为 $12(n-2)$；

一面涂黑色的小立方体，其个数为 $6(n-2)^2$；

没有一面涂黑色的小立方体，其个数为 $(n-2)^3$.

根据题意，得 $$6(n-2)^2=(n-2)^3$$

即 $$n-2=6,\quad ∴\quad n=8.$$

21. [解](C)

当 a 和 b 是整数时，$a^b=1$ 有三种情况：

(1) $a=1$； (2) $a=-1$, b 是偶数； (3) $b=0$, $a\neq 0$。

本题中，$a=x^2-x-1$, $b=x+2$, 则

对于第一种情况，$x^2-x-1=1$,

即 $(x-2)(x+1)=0$, 解得 $x=2$ 或 $x=-1$。

对于第二种情况，$x^2-x-1=-1$ 且 $x+2$ 是偶数，

由 $x^2-x=0$, 可解得 $x=0$ 或 1。

因为 $x=0$ 时，$x+2=0+2=2$ 是偶数，所以 $x=0$ 是方程的解。

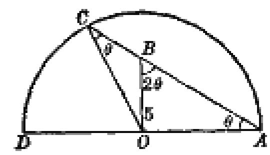
因为 $x=1$ 时，$x+2=3$ 是奇数，所以 $x=1$ 不是方程的解，故舍去。

对于第三种情况，$x+2=0$, 且 $x^2-x-1\neq 0$,

由 $x+2=0$, 解得 $x=-2$。

因为 $x^2-x-1=(-2)^2-(-2)-1=5\neq 0$, 所以 $x=-2$ 是方程的解。

综上所述，满足方程的整数解有 4 个。



22. [解](D)

如图，令 $2\theta=60°=\angle ABO \doteq \overset{\frown}{CD}$, 则 $\angle CAD=\theta$。

∵ $\triangle COA$ 是等腰三角形，∴ $\angle ACO=\theta$。又 $\angle BOC=2\theta-\theta=\theta$, ∴ $\triangle BOC$ 也是等腰三角形，且 $BC=5$。

23. [解](C) 由 x、y 的值可知，x、y 是方程 $W^3-1=(W-1)(W^2+W+1)=0$ 的复数根，所以 $x^3=y^3=1$。

因此 $x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3=1+1=2\neq -1$。

24. [分析] 本题是个离散型随机变量的概率分布列的问题。若把样本空间的任何子集作为事件 A，那么只要运用"任何事件 A 的概率 $P(A)$ 是 A 中各样本点的概率之和"这个定义，就容易想到如下的解法。

[解](C) 我们将取到数字 $d_1, d_2, \cdots$, 中的任何子集都当作为事件，它的概率记作 $P\{d_1, d_2, \cdots\}$，则

$$P\{d\}=\log_{10}\frac{d+1}{d}, \quad P\{d, d+1\}=\log_{10}\frac{d+1}{d}+\log_{10}\frac{d+2}{d+1}=\log_{10}\frac{d+2}{d}.$$

根据题意，取到数字 2 的概率恰好是所取数字包含在下列某个集合中的概率的 $\frac{1}{2}$。换句话说，所求的事件（即某个集合）的概率恰好是取到数字 2 的概率的 2 倍，于是

$$\begin{aligned}2P\{2\}&=2\log_{10}\frac{3}{2}=\log_{10}\frac{9}{4}\\&=\log_{10}\frac{5}{4}+\log_{10}\frac{6}{5}+\cdots+\log_{10}\frac{9}{8}\\&=P\{4, 5, 6, 7, 8\},\end{aligned}$$

从而这个集合是 $\{4, 5, 6, 7, 8\}$。

25. [解](B) 设长方体的长、宽、高分别为 a, ar, ar^2, 则

长方体的体积：$a(ar)(ar^2)=8$, $ar=2$。

长方体的全面积：$2a^2r+2a^2r^2+2a^2r^3=32$。

又 $2a^2r+2a^2r^2+2a^2r^3=2(ar)(a+ar+ar^2)=4(a+ar+ar^2)$。

但是上述最后的表达式恰好是长方体的所有棱的长度之和，所以，所有棱长之和为 32。

26. [解](E) 因为数 $\frac{n-13}{5n+6}$ 是可约且非零，因此它的倒数存在且可约，而要使

$$\frac{5n+6}{n-13}=5+\frac{71}{n-13}$$

可约的充分必要条件是数 $\frac{71}{n-13}$ 是可约的。

因为 71 是质数，$n-3$ 必须是 71 的倍数，所以 $n-13=71$, $n=84$ 是最小正整数解。

27. [解] (C) 因为 $x_1=3^{\frac{1}{3}}$，$x_2=(3^{\frac{1}{3}})^{\sqrt[3]{3}}=3^{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}$，

$$x_3=(3^{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}})^{\sqrt[3]{3}}=3^{\frac{\sqrt[3]{9}}{3}},$$

$$x_4=(3^{\frac{\sqrt[3]{9}}{3}})^{\sqrt[3]{3}}=3^{\frac{\sqrt[3]{27}}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3.$$

所以最小的 n 是 4。

28. 由正弦定理：$\dfrac{27}{\sin A}=\dfrac{48}{\sin 3A}$。

利用 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$，我们有

$$\frac{48}{27}=\frac{16}{9}=\frac{\sin 3A}{\sin A}=3-4\sin^2 A,$$

即

$$\sin^2 A=\frac{11}{36}.$$

从而解得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$，$\cos A=\dfrac{5}{6}$（$\cos A$ 非负，因为 $0<3A<180°$）。

再由正弦定理：

$$\frac{b}{\sin(180°-4A)}=\frac{27}{\sin A},\quad b=\frac{27\sin 4A}{\sin A}.$$

因为 $\sin 4A=2\sin 2A\cdot\cos 2A=4\sin A\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)$，

所以

$$b=27\times 4\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)$$
$$=27\times 4\times\frac{5}{6}\times\left(\frac{25}{36}-\frac{11}{36}\right)=35.$$

29. [解](C) 首先，因为 $9ab$ 的末位数字是零，所以它的各位数字之和与数 $N=\dfrac{9ab}{10}$ 的各位数字之和相同。

其次，对于任何由 k 个数字 d 组成的整数 M 可表示成

$$M=\frac{d}{9}(999\cdots99)=\frac{d}{9}(10^k-1).$$

于是

$$N=\frac{9}{10}\times\left[\frac{8}{9}(10^{1985}-1)\right]\times\left[\frac{5}{9}(10^{1985}-1)\right]$$
$$=\frac{4}{9}\times(10^{2\times 1985}-2\times 10^{1985}+1)$$
$$=\frac{4}{9}(10^{2\times 1985}-1)-\frac{8}{9}(10^{1985}-1)=A-B.$$

这里 A 是由 2×1985 个 4 组成的数，B 是由 1985 个 8 组成的数，因此 N 是这样一个数字：

开头是 1984 个 4，紧接着是一个 3，在 3 的后面是 1984 个 5，紧接着又是一个 6，所以 N 的各位数字之和是

$$1984\times(4+5)+(3+6)=1985\times 9=17865.$$

30. [解法一](E) 因为 $40[x]$ 是偶数，$40[x]-51$ 是奇数。所以 $4x^2$ 必须是奇整数，即 $4x^2=2k+1$，$x=\dfrac{\sqrt{2k+1}}{2}$，将它代入原方程可得

$$\left[\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\right]=\frac{k+26}{20}=\frac{k-14}{20}+2.$$

因此，整数 k 与 14 对于模 20 同余，即

$$k\equiv 14(\mathrm{mod}\,20).$$

此外，根据性质 $[x]\leqslant x<[x]+1$，得

$$\frac{k+26}{20}\leqslant\frac{\sqrt{2k+1}}{2}<\frac{k+26}{20}+1.$$

由

$$\frac{k+26}{20}\leqslant\frac{\sqrt{2k+1}}{2},$$

可得 $$(k-74)^2\leqslant 70^2.\qquad ①$$

由 $$\frac{\sqrt{2k+1}}{2}<\frac{k+26}{20}+1$$

可得 $$(k-54)^2>30^2.\qquad ②$$

因为 x^2 必须是正的，k 是非负的，故

由①得 $$4\leqslant k\leqslant 144,$$

由②得 $$k<24\quad 或者\quad k>84.$$

所以 $$4\leqslant k<24,\ 或者\ 84<k\leqslant 144.$$

在上述二个区间中，适合 $k\equiv 14 \pmod{20}$ 的 k 的值只能是

$$k=14,\ 94,\ 114,\ 134.$$

从而得出四个解：

$$x=\frac{\sqrt{29}}{2},\quad \frac{\sqrt{189}}{2},\quad \frac{\sqrt{229}}{2},\quad \frac{\sqrt{269}}{2}.$$

〔解法二〕 根据性质，$[x]\leqslant x<[x]+1$，可知

当 $[x]\leqslant x$ 时，有

$$4[x]^2-40[x]+51\leqslant 0,$$

所以 $$\frac{3}{2}\leqslant [x]\leqslant \frac{17}{2},$$

即 $$[x]=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

但是，对于上述的 $[x]$ 又必须满足

$$4([x]+1)^2-40[x]+51>0.$$

经检验得 $[x]=2,\ 6,\ 7,\ 8$，所以有四个解。

第三十七届美国中学数学竞赛试题(1986年)

1. $[x-(y-z)]-[(x-y)-z]=$

   (A) $2y$ (B) $2z$ (C) $-2y$ (D) $-2z$ (E) 0。

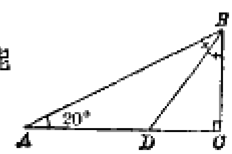
2. 在 xoy 平面内,如果直线 L 的斜率和在 y 轴上的截距分别为直线 $y=\frac{2}{3}x+4$ 的斜率之半和在 y 轴上的截距的两倍,那么直线 L 的方程是

   (A) $y=\frac{1}{3}x+8$ (B) $y=\frac{4}{3}x+2$ (C) $y=\frac{1}{3}x+4$ (D) $y=\frac{4}{3}x+4$

   (E) $y=\frac{1}{3}x+2$。

3. 如图,$\triangle ABC$ 有一直角 C,且 $\angle A=20°$。若 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线,则 $\angle BDC=$

   (A) 40° (B) 45° (C) 50° (D) 55° (E) 60°。



4. 设 S 是这样的命题:"若数 n 的各位数字之和能被 6 除尽,则 n 能被 6 除尽。"使命题 S 不成立的 n 的一个值是

   (A) 30 (B) 33 (C) 40 (D) 42,

   (E) 不同于(A)～(D)的答案。

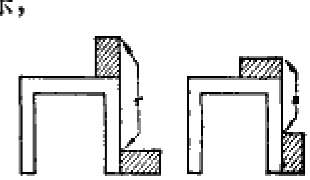
5. 化简:$\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$

   (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

6. 利用一张高度一定的桌子,放置两块相同的木块如图 1 所示,这时长度 r 是 32 英寸,然后重新放置木块。如图 2,这时长度 S 为 28 英寸。这桌子高是多少?

   (A) 28 英寸 (B) 29 英寸 (C) 30 英寸 (D) 31 英寸

   (E) 32 英寸。



(图1) (图2)

7. 小于或等于 x 的最大整数与大于或等于 x 的最小整数之和是 5。x 的解集是

   (A) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ (B) $\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$ (C) $\{x|2\leqslant x<3\}$ (D) $\{x|2<x\leqslant 3\}$

   (E) $\{x|2<x<3\}$。

8. 1980 年美国的人口是 226504825, 全国面积是 3615122 平方英里。1 平方英里为 $(5280)^2$ 平方英尺。在下列各数中哪一个数最接近平均每人所占的平方英尺数?

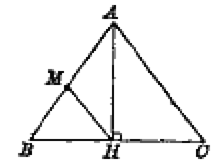
   (A) 5000 (B) 10000 (C) 50000 (D) 100000 (E) 500000。

9. 乘积 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$ 等于

   (A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{11}{20}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{7}{10}$。

10. 将 AHSME 的字母作排列共有120种。每一种排列看作为一个有五个字母的普通单词，然后按照字典次序将它们全部排列起来。在这样的编排中第86个单词的最后一个字母是

(A) A (B) H (C) S (D) M (E) E.



11. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=13$，$BC=14$，$CA=15$。又M是边AB的中点。H是由A到BC所引垂线的垂足。HM的长度是

(A) 6 (B) 6.5 (C) 7 (D) 7.5 (E) 8.

12. 约翰在今年的 AHSME 竞赛中得93分。如果按老的评分法计分，同样的答卷他只能得84分。有多少道题他没有回答？(新的评分方法是每一题答对者得5分；不答者得2分；答错者得0分。老的评分法是每人先有30分的底数，然后每答对一题得4分，每答错一题扣1分，未回答的题既不得分也不失分。)

(A) 6 (B) 9 (C) 11 (D) 14 (E) 不唯一确定.

13. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标是(4, 2)。若点(2, 0)在该抛物线上，则 abc 等于

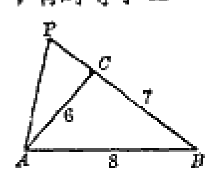
(A) -12 (B) -6 (C) 0 (D) 6 (E) 12.

14. 假定"hop"，"skip"，"jump"都是特定的长度单位。若 b 个"hop"等于 c 个"skip"，d 个"jump"等于 e 个"hop"，f 个"jump"等于 g 米，则1米等于多少个"skip"？

(A) $\frac{bdg}{cef}$ (B) $\frac{cdf}{beg}$ (C) $\frac{cdg}{bef}$ (D) $\frac{cef}{bdg}$ (E) $\frac{ceg}{bdf}$.

15. 一个学生要计算 x, y, z 的平均数 A。他先算 x 和 y 的平均数，然后再算所得平均数和 z 的平均数，将最后所得的结果作为 A。当 $x<y<z$ 时，该学生的最后结果是

(A) 正确的 (B) 总是小于 A (C) 总是大于 A (D) 有时小于 A，有时等于 A
(E) 有时大于 A，有时等于 A.



16. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$BC=7$，$CA=6$。延长边BC到P，使$\triangle PAB$和$\triangle PCA$相似，如右图所示。PC的长度是

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11.

17. 置于暗室中的一只抽屉内装有100只红袜子，80只绿袜子，60只蓝袜子和40只黑袜子。一个少年从抽屉中选取袜子，每次取一只，但无法看到所取袜子的颜色。为了确保取出的袜子中至少包含有10双，最少必须取几只袜子？(一双袜子是指两只相同颜色的袜子，但每只袜子只能一次用在一双之中)

(A) 21 (B) 23 (C) 24 (D) 30 (E) 50.

18. 一平面截一半径为1的正圆柱，截口成一椭圆。若该椭圆的长轴比短轴长50%，则长轴的长度为

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{9}{4}$ (E) 3.

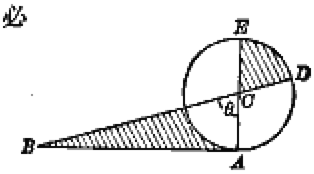
19. 一个公园的形状是边长为2公里的正六边形。艾丽丝从一个角顶出发沿着公园的周边步行5公里。这时她离出发点是多少公里？

(A) $\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{14}$ (C) $\sqrt{15}$ (D) $\sqrt{16}$ (E) $\sqrt{17}$.

20. 假定 x 和 y 是正数并且成反比。若 x 增加了 $p\%$，则 y 减少了

(A) $p\%$ (B) $\frac{p}{1+p}\%$ (C) $\frac{100}{p}\%$ (D) $\frac{p}{100+p}\%$ (E) $\frac{100p}{100+p}\%$.

21. 在下面的图形中，θ 是以弧度度量的，C 是圆心，BCD 和 ACE 是直线段，且 AB 和圆相切于 A。设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，两个阴影部分面积相等的充分必要条件是



(A) $\operatorname{tg}\theta=\theta$ (B) $\operatorname{tg}\theta=2\theta$ (C) $\operatorname{tg}\theta=4\theta$

(D) $\operatorname{tg}2\theta=\theta$ (E) $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\theta$。

22. 随机地从$\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$中取出6个不同的整数。在所取的数中，第二最小的数是3的概率是

(A) $\frac{1}{60}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 不同于(A)～(D)的答案。

23. 设 $N=69^5+5\times69^4+10\times69^3+10\times69^2+5\times69+1$ 有多少个正整数是N的因数？

(A) 3 (B) 5 (C) 69 (D) 125 (E) 216。

24. 设 $P(x)=x^2+bx+c$，b 和 c 是整数。若 $P(x)$既是 x^4+6x^2+25 也是$3x^4+4x^2+28x+5$的一个因式，那么 $P(1)$是多少？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8。

25. 若$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数，则

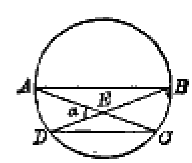
$$\sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N]=$$

(A) 8192 (B) 8204 (C) 9218 (D) $[\log_2(1024!)]$ (E) 不同于(A)～(D)的答案。

26. 要求在坐标平面内构造一个直角三角形，使得它的两条直角边分别平行于 x 轴和 y 轴，且两条直角边上的中线分别落在直线 $y=3x+1$ 和 $y=mx+2$ 上。使这样的三角形存在的常数m有几个？

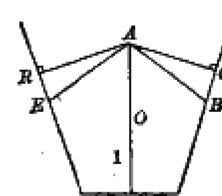
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 多于3。

27. 在附图中，AB 是圆的直径，CD 是平行于 AB 的弦，且 AC 和 BD 相交于 E，$\angle AED=\alpha$，$\triangle CDE$ 和 $\triangle ABE$ 的面积之比是



(A) $\cos\alpha$ (B) $\sin\alpha$ (C) $\cos^2\alpha$ (D) $\sin^2\alpha$ (E) $1-\sin\alpha$。

28. $ABCDE$ 是正五边形。AP，AQ 和 AR 分别是由A向 CD，CB 和 DE 的延长线上所引的垂线。设O是正五边形的中心。若 $OP=1$，则 $AO+AQ+AR$ 等于



(A) 3 (B) $1+\sqrt{5}$ (C) 4 (D) $2+\sqrt{5}$ (E) 5。

29. 不等边三角形 ABC 的两条高的长度分别为4和12，若第三条高的长也为整数，那么它的长度最大可能是多少？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 不同于(A)～(D)的答案。

30. 联立方程

$2y=x+\frac{17}{x}$，$2z=y+\frac{17}{y}$，$2w=z+\frac{17}{z}$，$2x=w+\frac{17}{w}$ 的实数解(x, y, z, w)的组数是

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16。

解　答

1. [解](*B*)　$[x-(y-z)]-[(x-y)-z]=x-y+z-x+y+z=2z$。

2. [解](*A*)　已知直线的斜率是 $\frac{2}{3}$，且直线在 y 轴上的截距是 4. 故直线 L 的斜率是 $\frac{1}{3}$，在 y 轴上的截距是 8。

3. [解](*D*)　因为 $\angle C=90°$，$\angle A=20°$，所以 $\angle ABC=70°$，$\angle DBC=35°$。由此可以得 $\angle BDC=90°-35°=55°$。

4. [解](*B*)　命题 S 是假的。若数 n 的各位数字之和能被 6 除尽，但 n 本身不能被 6 除尽。数 33 就具有这些特性。

5. [解](*A*)　$\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2=\left[(3^3)^{\frac{1}{6}}-\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\left[\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]^2=\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}\right]^2=\frac{3}{4}$。

6. [解](*C*)　设 h，l 和 w 分别为桌子的高，木块的长和宽。于是，由图 1 得 $l+h-w=32$。由图 2 得

$$w+h-l=28.$$

将上述两式相加得 $h=30$。

7. [解](*E*)　设 $\lfloor x\rfloor$ 是小于或等于 x 的最大整数，$\lceil x\rceil$ 是大于或等于 x 的最小整数。

若 $x\leqslant 2$，则 $\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil\leqslant 2+2<5$，
所以在 $x\leqslant 2$ 的情况下，无解。

若 $x\geqslant 3$，则 $\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil\geqslant 3+3$，无解。
最后，若 $2<x<3$，则 $\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil=2+3=5$。
因此，对每个这样的 x 是一个解，所以 x 的解集是(*E*)。

8. [解法一](*E*)　因为人口约 230 百万，面积低于 4 百万平方英里。所以每平方英里约有 60 人。

因为 1 平方英里约 $(5000\text{ 英尺})^2=25$ 百万平方英尺。所以每人约占 $\frac{25}{60}$ 百万平方英尺。则最接近的答案是(*E*)。

[解法二]　$$\frac{(3.6\times 10^6)\times(5.3\times 10^3)^2}{2.3\times 10^8}=\frac{(3.6)\times(5.3)^2}{2.3}\times 10^4(\text{平方英尺/人})$$
因为 $\frac{3.6}{2.3}$ 略大于 1.5，$(5.3)^2$ 介于 25 和 30 之间，因此，确切的答案是约 $(28\times 1.5)\times 10000=420000$。所以是(*E*)。

9. [解](*C*)　$$\text{原式}=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{10}\right)\right]$$
$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{9}{10}\right]\left[\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{11}{10}\right]=\frac{11}{20}.$$

10. [解](*E*)　首先，以 A 为首有 $24=4!$ 个单词，其次，以 E 为首和以 H 为首各有 24 个单词。这样，第 86 个单词是以 M 为首，且它是 $(86-72=14)$ 第 14 个，在以 M 为首的前 14 个单词中，前 6 个是以 MA 为首，接着 6 个是以 ME 为首。于是，第 13 个单词是以 MH 为首是 MHAES，第 14 个是 MHASE。所以第 86 个单词的最后一个字母是 E。

11. [解](*B*)　$\triangle AHB$ 是直角三角形，在任意一个直角三角形中，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。因此，HM 的长度是 6.5。

12. [解法一](*B*)　设 c 为约翰答对的题数，w 和 u 分别为答错和未回答的题数，则

$$\begin{cases}30+4c-w=84,\\5c+2u=93,\\c+w+u=30.\end{cases}$$

解此方程组得 $c=15$，$w=6$，$u=9$。

【解法二】 $$84=30+4c-w=(c+w+u)+4c-w=5c+u.$$

$$\begin{cases}5c+u=84,\\5c+2u=93.\end{cases}$$

解此方程组得 $u=9$.

13. [解法一](*E*) 因为点(4, 2)是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点,又点(2, 0)在此抛物线上,则

$$\begin{cases}2=16a+4b+c,\\4=-\dfrac{b}{2a},\\0=4a+2b+c.\end{cases}$$

解此方程组得 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=4$, $c=-6$.

∴ $abc=12$.

[解法二] 因为(4, 2)是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点。所以抛物线关于 $x=4$ 对称。又因为 (2, 0) 在此抛物线上,它关于 $x=4$ 的对称点是(6, 0)。换句话说,2和6是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根。于是

$$y=ax^2+bx+c=a(x-2)(x-6).$$

将点(4, 2)代入上式,得

$$2=a(2)(-2)=-4a.$$

即 $a=-\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x-6$.

∴ $$abc=\left(-\frac{1}{2}\right)(4)(-6)=12.$$

14. [解](*D*) b hops $=c$ skips, 1 hop $=\dfrac{c}{b}$ skips;

d jumps $=e$ hops, 1 jump $=\dfrac{e}{d}$ hops,

f jumps $=g$米, 1米 $=\dfrac{f}{g}$ jumps.

因此 $$1米=\frac{f}{g}\text{ jumps}=\frac{f}{g}\left(\frac{e}{d}\text{ hops}\right)=\frac{f}{g}\left(\frac{e}{d}\left(\frac{c}{b}\text{ skips}\right)\right)=\frac{cef}{bdg}\text{ skips}.$$

15. [解](*C*) 正确的平均数 A 是 $\dfrac{x+y+z}{3}$。而学生计算的平均数是

$$B=\frac{\dfrac{x+y}{2}+z}{2}=\frac{x+y+2z}{4}.$$

于是

$$B-A=\frac{2z-x-y}{12}=\frac{(z-x)+(z-y)}{12}>0.$$

($\because$ $z>x$, $z>y$).

因此,该学生的最后结果总是大于 A.

16. [解](*C*) 由 $\triangle PAB\backsim\triangle PCA$, 得

$$\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}=\frac{CA}{AB},$$

$$\frac{PA}{PC+7}=\frac{PC}{PA}=\frac{6}{8}.$$

解方程组:

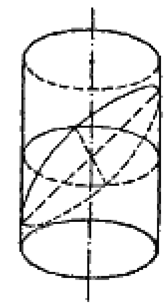
$$\begin{cases}6(PC+7)=8PA,\\6PA=8PC.\end{cases}$$

即得 $PC=9$.

17. [解法一](*B*) 对于任何选取，当且仅当被选取的各种颜色的袜子都是奇数时，各种颜色的袜子至多各有一只无配偶。于是，24只袜子满足，至多有4只袜子无配偶，剩余的20只袜子就成10双。因而，取23只袜子即可，因为23不是四个奇数的和，23只袜子中至多有3只袜子无配偶。另一方面，取22只就不行。若红，绿，蓝和黑袜子的数目分别为5，5，5，7，则有4只袜子无配偶，但此时只有9双。这样，最少必须取23只袜子。

[解法二] 如果我们只要1双，那么要取5只袜子才能满足。而且，取4只不能确保1双，因为选取的袜子可能是每种颜色的各一只。

如果我们要2双，那么要取7只袜子才能满足。任何7只袜子的集合必定包含1双。如果我们除去这1双，那么由上所述，剩余5只袜子将包含第2双。另一方面，取6只袜子可能包含3只绿色，1只黑色，1只红色和1只蓝色，因此只有1双。这样，7只袜子是确保2双的最小数。



同理，我们必须取9只袜子确保有3双。

一般地，取$2p+3$只袜子确保有p双。这个公式可利用数学归纳法来证明。

这样，为了确保10双，最少必须取23只袜子。

18. [解](*E*) 如图，显然，椭圆的短轴就是圆柱的直径。因此，椭圆短轴的长度为2，从而得椭圆长轴的长度为$2+0.5\times2=3$。

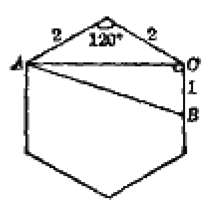
19. [解法一] (*A*) 如图1，设艾丽丝从角顶A出发且在B点终止。在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=2\sqrt{3}$。

由勾股定理，得

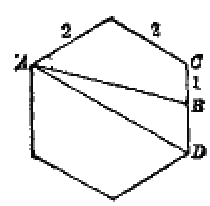
$$AB^2=13. \quad 因此 \quad AB=\sqrt{13}.$$

[解法二] 如图2，在$\triangle ABD$中，$\angle ADB=60°$，$AD=4$，$BD=1$。由余弦定理，得

$$AB^2=1^2+4^2-2\times1\times4\times\frac{1}{2}=13 \qquad \therefore \quad AB=\sqrt{13}$$



(图 1)



(图 2)

20. [解](*E*) x和y成反比，就是说，如果x扩大k倍，那么y就缩小k倍。设x'和y'是x增加了$p\%$以后的新值，则 $x'=\left(1+\frac{p}{100}\right)x$，$y'=\dfrac{y}{\left(1+\frac{p}{100}\right)}=\dfrac{100}{100+p}y$。

根据定义，y减少的百分比是

$$100\left(\frac{y-y'}{y}\right)=100\left(1-\frac{100}{100+p}\right)=\frac{100p}{100+p}.$$

21. [解](*B*) 这阴影扇形的面积是$\frac{\theta}{2}(AC)^2$，并且它必须等于$\triangle ABC$的面积之半。这里$\triangle ABC$的面积是$\frac{1}{2}(AC)(AB)$。于是，由$\frac{\theta}{2}(AC)^2=\frac{1}{4}(AC)(AB)$，得

$$2\theta=\frac{AB}{AC}=\operatorname{tg}\theta.$$

22. [解](*C*) 随机地从$\{1,2,3,\cdots,10\}$中取出6个不同的整数的方法种数共有$C_{10}^6=210$。

如果在所取的数中，第二最小数是3，那么一个数是取自$\{1,2\}$且四个数是取自$\{4,5,\cdots,9,10\}$。取法种数有$C_2^1\cdot C_7^4=70$。因此，第二最小的数是3的概率是

$$70 \div 210 = \frac{1}{3}.$$

23. [解](E) 由二项式定理，$N = (69+1)^6 = (2\cdot5\cdot7)^6$。于是一个正整数 d 是 N 的一个因数，即 $d = 2^p\cdot5^q\cdot7^r$，其中 p，q，r 是 0，1，2，4，5 这六个整数中的任何一个。因此，对于 d 有 $6^3 = 216$ 种选择。即有216个正整数是 N 的因数。

24. [解法一](D) 因为 $P(x)$ 是 x^4+6x^2+25 与 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的一个因式。因此，它也是

$$3(x^4+6x^2+25)-(3x^4+4x^2+28x+5) = 14x^2-28x+70 = 14(x^2-2x+5)$$

的一个因式。

因此，$P(x) = x^2-2x+5$，且 $P(1) = 4$。

[解法二] $$x^4+6x^2+25 = x^4+10x^2+25-4x^2 = (x^2+5+2x)(x^2+5-2x).$$

因此，$P(x)$ 或是 x^2+5+2x 或是 x^2+5-2x。

由长除法得，只有 x^2+5-2x 是 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的一个因式。

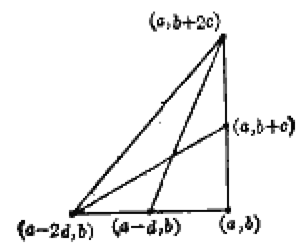
$\therefore$ $P(x) = x^2+5-2x$，$P(1) = 4$。

25. [解](B)

$$\because\ [\log_2 N] = \begin{cases} 1, 对于\ 2\leqslant N<2^2 \\ 2, 对于\ 2^2\leqslant N<2^3 \\ \cdots\cdots \\ 9, 对于\ 2^9\leqslant N<2^{10} \\ 10, 对于\ N<2^{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N] &= 1\times(2^2-2)+2\times(2^3-2^2)+\cdots+9\times(2^{10}-2^9)+10 \\ &= 9\times2^{10}-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2)+10 \\ &= 9\times2^{10}-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2+1)+11 \\ &= 9\times2^{10}-(2^{10}-1)+11 = 8\times2^{10}+12 = 8204. \end{aligned}$$

26. [解](C) 在任一个直角三角形中，如果直角边平行于轴，中线过直角边的中点，那么其中一条中线的斜率是另一条中线的斜率4倍(如图)。这里 a，b，c，d 是任意的(除 $c\neq0$，$d\neq0$ 外)。



这样，中线的斜率是

$$\frac{c}{2d}\ 和\ \frac{2c}{d} = 4\left(\frac{c}{2d}\right).$$

当 $\frac{c}{2d} = 3$ 时，$m = 4\times3 = 12$。

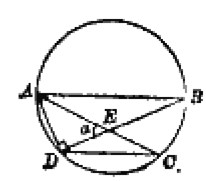
当 $\frac{c}{2d} = m$ 时，$3 = 4m$，$m = \frac{3}{4}$。

因而，在我们的问题中，m 或是 12，或是 $\frac{3}{4}$。因此，使这样的三角形存在的常数 m 有2个。

事实上，对于每个 m 值有无限多的三角形，如对于 $m = 12$，取任一个直角三角形，它的直角边平行于轴且斜边的斜率是 $\frac{12}{2}$。例如，这三角形的顶点是(0，0)，(1，0)，(1，6)，则直角边上中线的斜率为 12 和 3。所以，这三角形的中线相交于 $y = 12x+2$ 与 $y = 3x+1$ 的交点。从而中线落在这直线上。

最后，对于任何这样中心伸缩的三角形(它们有同样的重心且直角边和轴平行的较大或较小的三角形)，中线仍然落在这些直线上。

27. [解](C) 如图，因为 $AB\parallel DC$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB}$，且 $\triangle CDE\backsim\triangle ABE$。因此



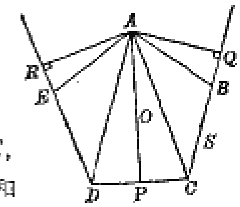
$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABE}} = \left(\frac{DE}{AE}\right)^2.$$

连结 AD，因为 AB 是直径，所以 $\angle ADB = 90°$。

在直角三角形 ADE 中，

$$DE = AE\cos\alpha, \qquad \left(\frac{DE}{AE}\right)^2 = \cos^2\alpha.$$

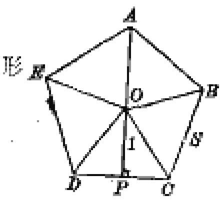
所以 $\dfrac{S_{\triangle DHE}}{S_{\triangle ABE}} = \cos^2\alpha$.



(图1)

28. [解](C) 设正五边形的边长为 S，首先，如图1，正五边形面积是$\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADE$ 的面积之和。这三个三角形的底边均为 S，高分别为 AQ，AP 和 AR。它们的面积之和为

$$\frac{S}{2}(AP + AQ + AR).$$



(图2)

其次，从图2可知，在每一个三角形中，它们的底边是 S，高为 1，因此，正五边形面积是 $\dfrac{5S}{2}$.

因此 $AP + AQ + AR = 5$. ∴ $AO + AQ + AR = 4$.

29. [解法一](B) 设长度为 4 的高落在边 a 上，长度为 12 的高落在边 b 上，第三条高的长度为 h 且落在边 c 上，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$4a = 12b = hc = 2S. \qquad (*)$$

因为此三角形是不等边三角形，所以

$$c < a + b,\ c > a - b.$$

换句话说

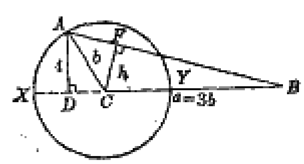
$$\frac{2S}{h} < \frac{2S}{4} + \frac{2S}{12}, \qquad \frac{2S}{h} > \frac{2S}{4} - \frac{2S}{12},$$

即

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{h} > \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

因此，$3 < h < 6$. 由于 h 是整数，故最大可能是 5.

[解法二] 由(*)式得 $a = 3b$. 固定边 CB. A 是以 C 为圆心，b 为半径的圆上任一点(除点 X，Y 之外)，如右图。



∵ $\triangle FCB \backsim \triangle DAB$， ∴ $\dfrac{h}{4} = \dfrac{3b}{AB}$.

此外，$AB < a + b = 4b$(当 $A = X$ 时，$AB = 4b$)，

$AB > a - b = 2b$(当 $A = Y$ 时，$AB = 2b$)。

因此，$\dfrac{3b}{4b} < \dfrac{h}{4} < \dfrac{3b}{2b}$，即 $3 < h < 6$.

对于整数 h 可能的最大值是 5.

30. [解](B) 对于任何正数 a，有不等式

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{17}{a}\right) \geqslant \sqrt{17}.$$

当且仅当 $a = \dfrac{17}{a}$，即 $a = \sqrt{17}$ 时等号成立。

于是，如果 $x > 0$，那么依次考察给出的每个方程，有 $y \geqslant \sqrt{17}$，$z \geqslant \sqrt{17}$，$w \geqslant \sqrt{17}$，$x \geqslant \sqrt{17}$.

假设 $x > \sqrt{17}$，则

$$y - \sqrt{17} = \frac{x^2 + 17}{2x} - \sqrt{17} = \left(\frac{x - \sqrt{17}}{2x}\right)(x - \sqrt{17}) < \frac{1}{2}(x - \sqrt{17}).$$

因此 $x > y$. 同样地 $y > z$，$z > w$，$w > x$，从而得出 $x > x$，显然矛盾。所以 $x = y = z = w = \sqrt{17}$，它是方程组的一组解，而且是 $x > 0$ 时，仅有的一组解。若记(x, y, z, w)是方程的一组解，则关于 $x < 0$，当且仅当$(-x, -y, -z, -w)$是方程组的一组解。这样 $x = y = z = w = -\sqrt{17}$ 是方程组仅有的另一组解，所以方程组的实数解的组数是 2.

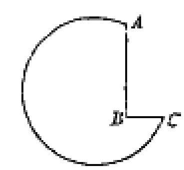
第一届美国数学邀请赛试题(1983年)

1．设x，y和z都大于1，ω是正数，且有$\log_x\omega=24$，$\log_y\omega=40$，$\log_{xyz}\omega=12$。求$\log_z\omega$。

2．设$f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$，其中$0<p<15$。决定在区间$p\leqslant x\leqslant 15$上$f(x)$的最小值。

3．方程$x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$的实根之积是多少？

4．一金工车间的切割工具呈有缺口的圆形，如图所示，圆的半径是$\sqrt{50}$厘米，AB长为6厘米，BC长为2厘米，$\angle ABC$为直角。求B点到圆心的距离(以厘米为单位)的平方。



5．设两复数x和y的平方和为7，它们的立方和为10，$x+y$能取到的最大实值是多少？

6．设$a_n=6^n+8^n$，决定a_{83}除以49的余数。

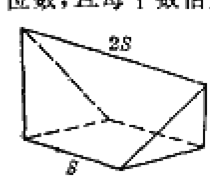
7．某个国王的二十五位骑士围坐在他们的圆桌旁，他们中间的三位被选派去杀一条恶龙(设三次挑选都是等可能的)，令P是被挑到的三位骑士中至少有两位是邻座的概率。若把P写成一个既约分数，其分子与分母之和是多少？

8．整数$n=\binom{200}{100}$(即C_{200}^{100})的二位数质因子的最大值是多少？

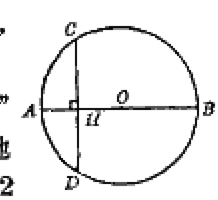
9．对$0<x<\pi$。求$f(x)=\dfrac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}$的最小值。

10．数1447，1005和1231有某些共同点，即每一个都是以1开头的四位数，且每个数恰好有两个数字相等。这样的数共有多少个？

11．一个以边长S的正方形为底的物体，如图所示。其最上方的一条边平行于底面，且长度为$2S$，其它边的长度均为S，若$S=6\sqrt{2}$，此物体的体积是多少？

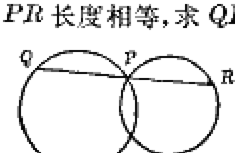


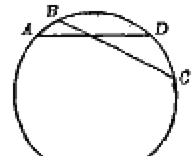
12．如图，一圆的直径AB是一个二位整数(十进制)，把它的十进制表示的两个数字交换次序恰巧是垂直弦CD的长度，交点H到圆心O的距离为一正有理数，试决定AB的长度。



13．对$\{1, 2, \cdots, n\}$及其每一非空子集，定义一个唯一确定的"交替和"如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数。(例如，$\{1, 2, 4, 6, 9\}$的"交替和"是$9-6+4-2+1=6$，$\{5\}$的"交替和"就是5)。对$n=7$，求所有这种"交替和"的总和。

14．在附图中有半径分别为6和8的圆，其圆心距为12．过两圆的一个交点P引一直线，使弦QP和PR长度相等，求QP的长度的平方。





15. 如附图所示，一个圆内有两条相交的弦，其中 B 点落在小弧 AD 上(注：小弧指所对的圆心角小于 $180°$ 的那段弧，下同)。设圆的半径为 5，$BC=6$，且弦 AD 被 BC 等分。又设 AD 是从 A 点引出的被 BC 等分的唯一弦。这样，小弧 AB 所对的圆心角的正弦必是一个有理数。若此数表示成既约分数 $\frac{m}{n}$，积 mn 是多少？

解　答

1. ［解法一］ 由 $\log_x\omega=24$，$\log_y\omega=40$，$\log_{xyz}\omega=12$。知 $0<x\neq1$，$0<y\neq1$，$0<xyz\neq1$，$0<\omega\neq1$，$z>0$，且 $\log_\omega x=\frac{1}{24}$，$\log_\omega y=\frac{1}{40}$，于是

$$\log_\omega xyz=\log_\omega x+\log_\omega y+\log_\omega z=\frac{1}{12}.$$

∴
$$\log_\omega z=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{1}{60},$$

从而得
$$\log_z\omega=60.$$

［解法二］ 根据题意，得

$$x^{24}=\omega,\ y^{40}=\omega,\ (xyz)^{12}=\omega.$$

$$z^{12}=\frac{\omega}{x^{12}y^{12}}=\frac{\omega}{\omega^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{3}{10}}}=\omega^{\frac{1}{5}}.$$

由此得
$$\omega=z^{60},\ \log_z\omega=60.$$

2. ［解］ ∵ $0<p\leqslant x\leqslant15$，∴ $|x-p|=x-p$，$|x-15|=15-x$，$|x-(p+15)|=p+15-x$。

由上可知 $f(x)=(x-p)+(15-x)+(p+15-x)=30-x$，若要使 $f(x)$ 最小，那么只须使 x 最大即可。所以当 $x=15$ 时，

$$f(x)_{\min}=15.$$

3. ［解法一］ 将原方程改写成

$$x^2+18x+45-2\sqrt{x^2+18x+45}-15=0,$$

即
$$(\sqrt{x^2+18x+45}+3)(\sqrt{x^2+18x+45}-5)=0.$$

解得
$$\sqrt{x^2+18x+45}=-3\quad(\text{舍去}),$$
$$\sqrt{x^2+18x+45}=5.$$

∴ $x^2+18x+45=25$，整理得 $x^2+18x+20=0$，其判别式为正。所以两实根之积是 20。

［解法二］ 令 $t^2=x^2+18x+45$，则

$$t^2-15=2\sqrt{t^2}=2t(\because t>0),$$
$$t^2-2t-15=0,$$
$$(t-5)(t+3)=0.$$

∵ $t>0$，∴ $t=5$。($t=-3$ 舍去)

从而有
$$x^2+18x+45=5^2,$$

即
$$x^2+18x+20=0.$$

所以两实根之积是 20。

［解法三］ 将原方程改写成

$$x^2+18x+45-2\sqrt{x^2+18x+45}+1=16,$$

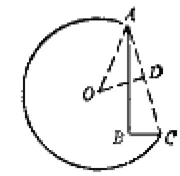
即
$$(\sqrt{x^2+18x+45}-1)^2=16,$$
$$\sqrt{x^2+18x+45}-1=\pm4.$$

当 $\sqrt{x^2+18x+45}-1=-4$ 时，得

$$\sqrt{x^2+18x+45}=-3\text{(矛盾,故舍去)}.$$

当$\sqrt{x^2+18x+45}-1=4$时,(以下同解法一).

4. [解法一] 连接 A, C 两点,过圆心 O 向 AC 作垂线交于 D 点(如图 1),则



(图 1)

$$AD=DC,\ AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{10},$$

$$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=2\sqrt{10}.$$

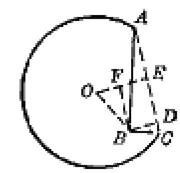
∴ $$\operatorname{tg}\angle OAD=2,$$

而 $\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{1}{3}$, 于是

$$\operatorname{tg}\angle OAB=\operatorname{tg}(\angle OAD-\angle BAC)=1,\ \angle OAB=\frac{\pi}{4}.$$

∴ $$OB^2=OA^2+AB^2-2\cdot OA\cdot AB\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=26.$$

[解法二] 如图 2, 连 AC, OB. 过 O、B 点分别作直线 AC 的垂线,且分别交 AC 于 E、D 点,又过 B 点作 $BF\perp OE$.



(图 2)

∵ $\triangle BCD\backsim\triangle ABC$, ∴ $\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{BC}$.

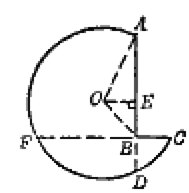
∴ $BD=\frac{6\times2}{2\sqrt{10}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $CD=\frac{BC^2}{AC}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$.

而 $$BF=DE=CE-CD=\frac{4}{5}\sqrt{10},$$

$$OF=OE-EF=OE-BD=\frac{7}{5}\sqrt{10}.$$

因此 $$OB^2=OF^2+BF^2=26.$$

[解法三] 如图 3, 设 $BD=x$, 则



(图 3)

$$AD=6+x,\ AE=ED=\frac{1}{2}(6+x),$$

$$BE=ED-BD=\frac{1}{2}(6-x).$$

根据 $AB\cdot BD=FB\cdot BC$, 得 $FB=3x$.

∵ $$OE=\frac{1}{2}FC-2=\frac{1}{2}(FB+BC)-2=\frac{1}{2}(3x-2),$$

$$OA^2=OE^2+AE^2,$$

∴ $$50=\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{6+x}{2}\right)^2.$$

由此解得 $$x=4.$$

于是,在 Rt$\triangle OEB$ 中

$$OB^2=OE^2+BE^2=\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{6-x}{2}\right)^2=26.$$

5. [解法一] 根据题意,得

$$\begin{cases}x^2+y^2=7\\x^3+y^3=10\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}(x+y)^2-2xy=7,\\(x+y)^3-3xy(x+y)=10.\end{cases}$$

令 $s=x+y$, $p=xy$, 代入上式得

$$\begin{cases}s^2-2p=7, & ①\\s^3-3ps=10. & ②\end{cases}$$

将①代入②得 $$s^3-21s+20=0,$$

即 $$(s-1)(s-4)(s+5)=0,$$

$$\therefore\ s_{\max}=(x+y)_{\max}=4.$$

[解法二] 由$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ 及 $x^2+y^2=7$, 得

$$xy=\frac{(x+y)^2-7}{2}.$$

由 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left[7-\frac{(x+y)^2-7}{2}\right]=10$，得

$$(x+y)^3-21(x+y)+20=0,$$

从而解得 $x+y=1,\ x+y=-5,\ x+y=4$。

∴ $$(x+y)_{max}=4.$$

6.［解］

$$\begin{aligned}a_n&=(7-1)^n+(7+1)^n\\&=[7^n-C_n^17^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}7-1]+[7^n+C_n^17^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}7+1]\\&=2\times[7^n+C_n^27^{n-2}+\cdots+C_n^{n-3}7^3+C_n^{n-1}7]\\&=2\times49[7^{n-2}+C_n^27^{n-4}+\cdots+C_n^{n-3}7]+14n.\end{aligned}$$

于是 $a_{83}=49K+14\times83=49K+1162$。（$K$ 是整数）

∵ 1162 除以 49 的余数是 35，

∴ a_{83} 除以 49 的余数是 35。

7.［解法一］ 根据题意，总的基本事件数为 C_n^3，又根据在三位骑士中至少有两位是邻座的条件，于是，一种情况是，三位骑士依次相邻，那么有 n 种选法；另一种情况是，二位骑士是邻座，此时第三位骑士就不选在已经邻座的两位骑士的两旁。也就是说，第三位骑士只能在 $(n-4)$ 位中任选一位，这样有 $n(n-4)$ 种选法。因此，满足条件的基本事件数为 $n+n(n-4)$。

∴ $$P_n=\frac{n+n(n-4)}{C_n^3}=\frac{6(n-3)}{(n-1)(n-2)},$$ 则

$$P=P_{25}=\frac{11}{46}.$$ 即分子与分母之和是57。

［解法二］ 25 位中取三位的取法总数为 C_{25}^3。取相邻两位的取法共有 25 种，再取另位一位共有 23 种。取出三位的总取法为 25×23。但其中有 25 种是重复的（相邻三位都取了二次）。则所求的概率为

$$P_{25}=\frac{25\times23-25}{C_{25}^3}=\frac{11}{46}.$$

∴ $$11+46=57.$$

［解法三］ 从围坐中选一人，有 C_{25}^1 种选法，并始终约定被选中的人的右边（或左边）那个人也随同而去。如此，已选得相邻两人，再在余下的人中选一人即可。为避免重复，在与已选两人不相邻的 21 人中选一人，有 C_{21}^1 种选法，然后加上已选两人之右邻（或左邻）的一人的一种，计得 (C_{21}^1+1) 种选法，故满足条件的选法有 $C_{25}^1(C_{21}^1+1)$ 种。于是

$$P_{25}=\frac{C_{25}^1(C_{21}^1+1)}{C_{25}^3}=\frac{11}{46}.$$

∴ 分子与分母之和是 57。

8.［解法一］ 设 p 为 $n=C_{200}^{100}=\frac{200!}{100!\,100!}$ 中最大的二位数质因子，则 $0<p<100$，而且分母 $100!\,100!=(100!)^2$ 中含有 p^2。因此分子 $200!$ 中至少含有 p^3，即 $3p<200$。

∴ $p<\frac{200}{3}<67$，从而得 $p=61$。

［解法二］ 由 $n=C_{200}^{100}=\frac{200\times199\times\cdots\times101}{100!}=\frac{101\times103\times\cdots\times199}{50!}\times2^{50}$。

在分子小于 200 的奇因子中，如果其含有最大的二位数质因子 p，那么它除含有 p 外，只能再含 3 的一个因数。

∵ $183=3\cdot61$， ∴ $p=61$。

9.［解法一］ ∵ $0<x<\pi$，∴ $x\sin x>0$。于是

$$f(x)=9x\sin x+\frac{4}{x\sin x}\geqslant2\sqrt{36}=12.$$

∴ 当$9x\sin x=\dfrac{4}{x\sin x}$，即$x^2\sin^2 x=\dfrac{4}{9}$时，

$$f(x)_{\min}=12。$$

［解法二］ ∵ $0<x<\pi$，∴ $x\sin x>0$，又$9x^2\sin^2 x>0$，则

$$f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}\geqslant\frac{2\sqrt{(9x^2\sin^2 x)\cdot 4}}{x\sin x}=\frac{12x\sin x}{x\sin x}=12。$$

∴ 当$9x^2\sin^2 x=4$，即$x^2\sin^2 x=\dfrac{4}{9}$时，

$$f(x)_{\min}=12。$$

［解法三］ 令$f(x)=y$，$x\sin x=u$，则有

$$9u^2-yu+4=0。$$

由u是实数，得$(-y)^2-4\times9\times4\geqslant0$，即$y^2\geqslant144$。

于是 $y\leqslant-12$，$y\geqslant12$。

∵ $0<x<\pi$，∴ $x\sin x>0$，$y>0$。

故$y\leqslant-12$舍去。

当$y\geqslant12$时，而由

$$y=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}=12,$$

得 $x\sin x=\dfrac{2}{3}$，即$x\sin x=\dfrac{2}{3}$时，

$$y_{\min}=f(x)_{\min}=12。$$

10.［解法一］ 事实上，满足条件的四位数有如下六类：

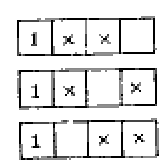
$$11\times\varDelta,\ 1\times1\varDelta,\ 1\times\varDelta1,$$
$$1\varDelta\varDelta\times,\ 1\times\varDelta\varDelta,\ 1\varDelta\times\varDelta。$$

而对于每一类有9×8个四位数，所以满足条件的这样的四位数共有$6\times9\times8=432$（个）。

［解法二］ 根据题意，每一个都是以1开头的四位数，它们的后三位数可分两种情况考虑：

(1) 后三位数中有一个1，则有3种放法。剩下的两位中的一个有9个数字可放，另一个有8个数字可放，所以共有$3\times9\times8$种。

(2) 后三位数中没有1，但要有两个相同的数，有3种方法，即右图的三种情况，除了1以外的9个数都可以这样放。最后剩下的一个数字有8种不同的数字可以放。所以共有$3\times9\times8$。故总数为$2\times3\times9\times8=432$(种)。



［解法三］ (1) 四位数中含有两个1的情况：

在四位数中含有两个1，其中一个1在千位数上的共有三类。而对于每一类的四位数中，剩下的两个数位上的数字的取法共有$2\times C_9^2$种，因此，符合情况(1)的四位数有$3\times2\times C_9^2$(个)。

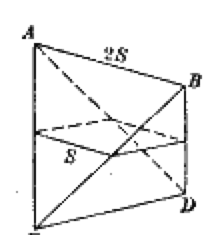
(2) 四位数中含有两个相同数字(除两个1以外)的情况：

由于四位数中，千位数字是1，且有两个数字相同的共有三类。而对于每一类的这样四位数，剩下的三个数位上的数字的取法有$C_9^1\times C_8^1$种，因此，符合情况(2)的四位数有$3\times C_9^1\times C_8^1$(个)。

综上所述，满足条件的四位数共有

$$3\times2\times C_9^2+3\times C_9^1\times C_8^1=432(个)。$$

11.［解法一］ 如图1所示，因为原来以边长为S的正方形的四个顶点分别为AC，BC，AD和BD的中点，所以四面体$ABCD$是正四面体。且原正方形将正四面体$ABCD$分成体积相等的两部分。



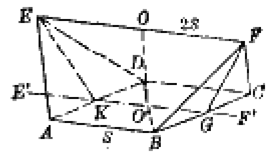
(图 1)

因为正四面体的棱为$2S$，所以

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{底}h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt3}{4}(2S)^2\times\sqrt{\frac{2}{3}}(2S)=\frac{2}{3}\sqrt2 S^3。$$

因此，所求物体的体积是

$$V=\frac{1}{2}V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times(6\sqrt{2})^3=288.$$



(图 2)

[解法二] 如图 2 所示。$ABCD$ 是边长为 S 的正方形，EF 平行底面 $ABCD$，且 $EA=ED=FB=FC=S$。根据对称性，EF 在底面的正射影 $E'F' \parallel AB$，EF 的中点 O 在底面的正射影为正方形 $ABCD$ 的中心 O'。

∴ $$OO'=\sqrt{\frac{3}{4}S^2-\frac{1}{4}S^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}S,\quad OG=\frac{\sqrt{3}}{2}S.$$

$$V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}S^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}S=\frac{\sqrt{2}}{6}S^3,$$

$$V_{O-EAD}+V_{O-FBC}=2V_{O-EAD}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}S^2\cdot DE\cdot\sin\angle OEK$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}S^2\cdot S\cdot\sin\angle E'KE$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}S^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6}S^3.$$

∴ $$V=\left(\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)S^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\times 36\times 6\times 2\sqrt{2}=288.$$

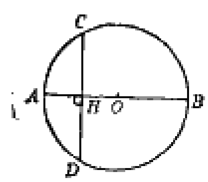
[解法三] 由拟柱体的体积公式，得

$$V=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S')$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}S\cdot\left(S^2+4\cdot\frac{3}{4}S^2\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}S^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}(6\sqrt{2})^3=288.$$

12. [解] 设 $AB=10x+y$，则 $CD=10y+x$。又设 $OH=a$，则有



$$\left(\frac{10x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{10y+x}{2}\right)^2+a^2,$$

$$(2a)^2=(10x+y)^2-(10y+x)^2,$$

即 $$99(x+y)(x-y)=(2a)^2.$$

∴ $2a$ 是 3×11 的倍数。设 $2a=3\times 11\times k\quad(k\in N)$，

于是有 $$99(x+y)(x-y)=9\times 11^2\times k^2,$$

$$(x+y)(x-y)=11\times k^2. \qquad (*)$$

若 $k=1$，则 $\begin{cases}x+y=11,\\ x-y=1.\end{cases}$

∴ $x=6,\ y=5$。因此直径 AB 的长度为 65。

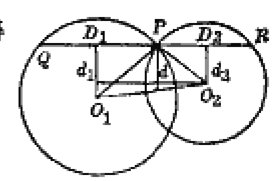
若 $k=2$，则方程(*)的解和题设矛盾。

13. [解] 把$\{1,2,3,\cdots,n\}$的所有子集(包括本身及空集)分成甲、乙两类。凡子集中含有元素 n 的归甲类，而不含 n 的归乙类。这样，若甲类中有集合$\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则乙类中就有集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，反之亦然，即$\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\longleftrightarrow\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，而该两集合的"交替和"之和为 n，因此所有"交替和"的总和，就是甲类中集合的个数乘以 n，即

$$n\cdot(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n\cdot 2^{n-1}.$$

当 $n=7$ 时，得所有这种"交替和"的总和是 448。

14. [解法一] 如图 1 所示，由 $\cos\angle PO_1O_2=\frac{12^2+8^2-6^2}{2\times 12\times 8}=\frac{43}{48}$，得



(图 1)

$$\sin\angle PO_1O_2=\frac{\sqrt{5\times 7\times 13}}{48}.$$

$$d^2=8^2+6^2-2\times 8\times 6\times\frac{43}{48}=14,$$

∴ $$d=\sqrt{14},\quad d_1+d_2=2\sqrt{14}.$$

又 $$8^2-d_1^2=6^2-d_2^2,\ d_1^2-d_2^2=28,$$

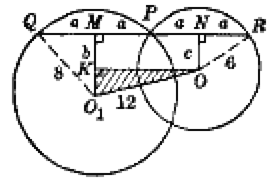
$$d_1-d_2=\frac{28}{2\sqrt{14}}=\sqrt{14}.$$

$$\cos\angle D_1O_1O_2=\frac{d_1-d_2}{12}=\frac{\sqrt{14}}{12},\ \sin\angle D_1O_1O_2=\frac{\sqrt{130}}{12}.$$

$$\sin(\angle D_1O_1O_2-\angle PO_1O_2)=\frac{\sqrt{130}}{12}\times\frac{43}{48}-\frac{\sqrt{14}}{12}\times\frac{\sqrt{5\times7\times13}}{48}=\frac{\sqrt{130}}{16}.$$

∴ $$QP=2\times8\times\frac{\sqrt{130}}{16}=\sqrt{130},\quad QP^2=130.$$

［解法二］ 如图 2 所示，$QP=PR=2a$，$O_1M=b$，$ON=c$，$O_1K=b-c$。在直角三角形 O_1OK 中，$OK^2+O_1K^2=O_1O^2$，



（图 2）

即 $$(2a)^2+(b-c)^2=12^2.$$

而 $$b=\sqrt{64-a^2},\ c=\sqrt{36-a^2}.$$

于是 $$4a^2-[\sqrt{64-a^2}-\sqrt{36-a^2}]^2=144,$$

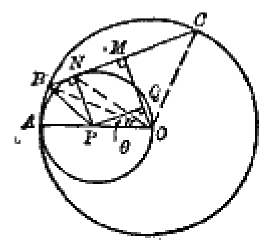
$$a^2-22=\sqrt{(64-a^2)(36-a^2)}.$$

两边平方，经整理后得 $4a^2=130$。

因此 $$QP^2=(2a)^2=4a^2=130.$$

15.［分析］ 如果能理解"AD 是从点 A 引出的被 BC 等分的唯一弦"一语的意思为：BC 是这样的一条弦，从定点 A 引出的许多弦中有且只有一条弦 AD 被它所平分。那么，该题也就迎刃而解了。因为弦 AD 的中点的轨迹是以 AO 为直径的圆 P，要 BC 平分 AD，就要 BC 与圆 P 相交，而且只能有一个交点，即相切，否则有两条 AD 被同一 BC 所平分。BC 弦长为 6，它是以 O 为圆心，4 为半径的圆的切线，因此是两圆的公切线。具体解法如下：

［解法一］ 如图 1 所示，$MC=3$，



（图 1）

$$MO=\sqrt{CO^2-MC^2}=4,$$

$$NP=\frac{1}{2}AO=\frac{5}{2}.$$

∵ $MNPQ$ 是矩形。 ∴ $MQ=\frac{5}{2}$，$OQ=\frac{3}{2}$。

又 $\triangle PQO$ 是直角三角形，$OP=\frac{5}{2}$，$OQ=\frac{3}{2}$，

∴ $PQ=2$。从而得 $MN=2$，$BN=1$。

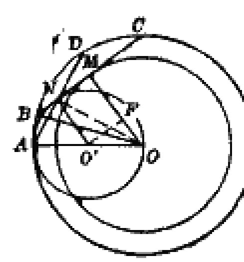
∵ $\triangle BNP$ 是直角三角形， ∴ $BP^2=1+\frac{25}{4}=\frac{29}{4}$。

在 $\triangle BOP$ 中，$BP^2=OB^2+OP^2-2\times OB\cdot OP\cdot\cos\theta$。

∴ $$\cos\theta=\frac{24}{25},\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25}.$$

因此积 mn 是 175。

［解法二］ 如图 2 所示，$NM=O'F=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(4-\frac{5}{2}\right)^2}=2$，



（图 2）

$$ON=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5},\ \cos\angle AON=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \sin\angle AON=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\cos\angle BON=\frac{OB^2+ON^2-BN^2}{2\times OB\cdot ON}=\frac{11}{5\sqrt{5}},$$

$$\sin\angle BON=\frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

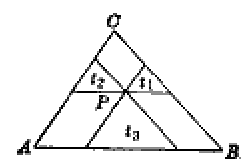
∴ $$\sin\angle AOB=\sin(\angle AON-\angle BON)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{11}{5\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{7}{25}.$$

∴ $$mn=175.$$

第二届美国数学邀请赛试题(1984 年)

1. 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$，是一个等差数列，公差是 1，并且 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{98}=137$。试求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{98}$ 的值。
2. 设 n 是由数字 0 或 8 组成，且又是 15 的倍数的最小正整数，计算 $\frac{n}{15}$。
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 的内部选取一点 P，过 P 点作三条分别与 $\triangle ABC$ 的三条边平行的直线。这样所得的三个三角形 t_1, t_2 和 t_3 的面积分别为 4, 9 和 49。求 $\triangle ABC$ 的面积。
4. 设 S 是一张由一些正整数(其中的正整数可以有重复)组成的表，表中包含正整数 68。S 中全部正整数的算术平均值是 56。然而，如果从 S 中去掉 68，剩余的正整数的平均值降为 55。S 中的最大正整数可以大到多少？

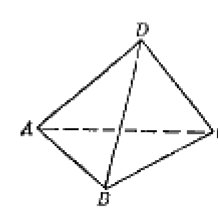


5. 若 $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ 和 $\log_8 b+\log_4 a^2=7$，确定 ab 的值。
6. 三个圆有相同的半径，其值为 3。圆心分别位于(14, 92)、(17, 76)和(19, 84)。一条直线通过(17, 76)，且位于直线一边的三个圆的各部分的总面积与位于直线另一边的三个圆的各部分的总面积相等。这条直线的斜率的绝对值是多少？
7. 函数 f 定义在整数集上，且满足

$$f(n)=\begin{cases} n-3, \text{若 } n\geqslant 1000, \\ f[f(n+5)], \text{若 } n<1000. \end{cases}$$

求 $f(84)$。

8. 方程 $Z^6+Z^3+1=0$ 在复平面中有一个复根，它的幅角 θ 在 $90°$ 与 $180°$ 之间。确定 θ 的度数。
9. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，棱 AB 的长是 3 厘米，面 ABC 的面积是 15 平方厘米，面 ABD 的面积是 12 平方厘米。这两个面的交角是 $30°$。求这四面体的体积是多少立方厘米？



10. 玛丽告诉约翰她在美国中学数学竞赛中所得的分数超过 80 分。根据这个分数，约翰就能定出玛丽做对的题目的数目。如果玛丽的得分低一些，但仍超过 80 分，约翰就无法确定她做对几题了。玛丽的分数是多少？(美国中学数学竞赛试题由 30 道选择题组成，得分按公式 $S=30+4C-W$ 计算，其中 C 为答对的题数，W 为答错的题数，未回答的题目不扣分)
11. 一个园丁把三棵枫树，四棵橡树和五棵白桦树种成一行。十二棵树的排列次序是随机的，每一种排列都是等可能的。把没有两棵白桦树相邻的概率写成既约分数 $\frac{m}{n}$。试求 $m+n$。
12. 函数 f 定义在实数集上，且对一切实数 x 满足等式：$f(2+x)=f(2-x)$ 和 $f(7+x)=f(7-x)$。设 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 的一个根。记 $f(x)=0$ 在区间 $-1000\leqslant x\leqslant 1000$ 中的根

的个数为 N。求 N 的最小值。

13. 求 $10\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} 3+\operatorname{arc\,ctg} 7+\operatorname{arc\,ctg} 13+\operatorname{arc\,ctg} 21)$ 的值。

14. 不能写成两个奇合数之和的最大偶整数是多少？(如果一个正整数至少可以被一个不是1及自身的正数除尽，那么这个正整数就称为合数。)

15. 若

$$\frac{x^2}{2^2-1^2}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{4^2-1^2}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{6^2-1^2}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{8^2-1^2}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}=1.$$

确定 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 的值。

解　　答

1. [解法一]　由已知条件，得

$$a_1+a_2+\cdots+a_{98}=\frac{98}{2}(a_1+a_{98})=49(a_1+a_{98})=137.$$

∴
$$a_2+a_4+\cdots+a_{98}=\frac{49}{2}(a_2+a_{98})=\frac{49}{2}(a_1+1+a_{98})$$
$$=\frac{49}{2}(a_1+a_{98})+\frac{49}{2}=\frac{137}{2}+\frac{49}{2}=93.$$

[解法二]　设
$$S_0=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{97},$$
$$S_e=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{98}.$$

则这两个数列都有49项，且对于所有 $n\geqslant 1$，有

$$a_{n+1}=a_n+1.$$

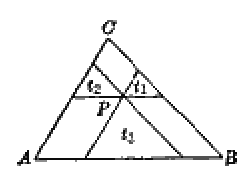
于是
$$S_0=S_e-49, \quad ①$$
$$S_0+S_e=137. \quad ②$$

将①式代入②式，得
$$S_e=93.$$

2. [解]　由题意可知，n 是3和5的公倍数。若 n 是5的倍数，n 的末位数必须是0(因末位数是5不合题意)。若 n 是3的倍数，n 必须包含若干个8，且它们的和是3的倍数。故 $n=8880$。

∴
$$\frac{n}{15}=592.$$

3. [解]　设 T 是 $\triangle ABC$ 的面积，T_1，T_2 和 T_3 分别是三角形 t_1，t_2 和 t_3 的面积；c 是边 AB 的长，c_1，c_2 和 c_3 分别是平行于边 AB 的三个三角形 t_1，t_2 和 t_3 的边的长。那么，由四个三角形相似，得



$$\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T}}=\frac{c_1}{c},\ \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T}}=\frac{c_2}{c} \text{和} \frac{\sqrt{T_3}}{\sqrt{T}}=\frac{c_3}{c}.$$

∵
$$c_1+c_2+c_3=c,$$

∴
$$\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T}}+\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T}}+\frac{\sqrt{T_3}}{\sqrt{T}}=\frac{c_1+c_2+c_3}{c}=1.$$

$$T=(\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}+\sqrt{T_3})^2=(\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{49})^2=144.$$

4. [解]　设 n 是表 S 中的正整数的个数，m 是 n 个正整数的和，那么，根据题意有

$$\begin{cases}\dfrac{m}{n}=56,\\[2mm]\dfrac{m-68}{n-1}=55.\end{cases}$$

从而解得 $n=13$, $m=728$.

现在，欲求 S 中的最大正整数可以大到多少？只须求出 S 中的其他正整数最小可以小到多少就行了．为此，S 必须包含 11 个 1（可以有重复），1 个 68 和 1 个 649 $(728-11-68=649)$，所以 S 中的最大正整数可以大到 649.

5．〔解法一〕 将两个方程相加，并且运用对数性质，得

$$\log_8 a+\log_8 b+\log_4 a^2+\log_4 b^2=12,$$

即

$$\log_8 ab+2\log_4 ab=12.$$

$$\frac{\log_2 ab}{\log_2 8}+2\frac{\log_2 ab}{\log_2 4}=12,$$

$$\frac{1}{3}\log_2 ab+\log_2 ab=12,$$

$$\frac{4}{3}\log_2 ab=12.$$

∴

$$\log_2 ab=9,\ ab=2^9=512.$$

〔解法二〕

$$\begin{aligned}\log_8 a+\log_8 b+\log_4 a^2+\log_4 b^2&=\log_8 ab+\log_4(ab)^2\\&=\log_{2^3}(\sqrt[3]{ab})^3+\log_{2^2}(ab)^2\\&=\log_2\sqrt[3]{ab}+\log_2 ab=\log_2(ab)^{\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

∴

$$\log_2(ab)^{\frac{4}{3}}=12,\quad (ab)^{\frac{4}{3}}=2^{12},\ ab=2^9=512.$$

6．〔分析〕 只须抓住"所求直线必须恰好位于(14, 92)的右边和(19, 84)的左边的等远处"这个关键，本题也就不难解决.

〔解法一〕 首先，这三个圆的圆心横坐标分别为 14, 17, 19；三个圆之间的圆心距都大于 6，即这三个圆两两不相交．其次，通过圆心(17, 76)的任一条直线将该圆的面积分成相等的两部分．于是，问题归结为求直线：

$$y-76=k(x-17) \qquad ①$$

的 k 的值，并且使得位于该直线一边的另外两个圆的各部分的总面积与位于该直线另一边的两个圆的各部分的总面积相等．为此目的，这条直线必须恰好位于(14, 92)的右边和(19, 84)的左边的等远处.

如图 1，点 $(14+h,\ 92)$ 和 $(19-h,\ 84)$ 必定满足方程①，即

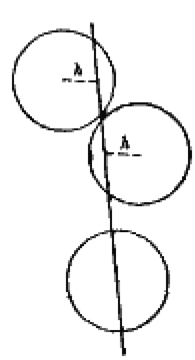
$$\frac{16}{h-3}=k=\frac{8}{2-h}, \qquad ②$$

由②解得

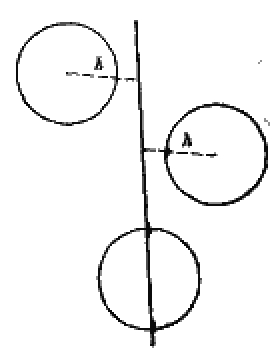
$$h=\frac{7}{3},\ k=-24.$$

∴

$$|k|=24.$$



（图 1）



（图 2）

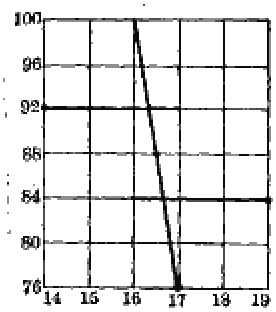
注：如图1所示，在这种情况下，$h<3$，所以解的唯一性是确定的。如果对于这些圆位置彼此不同，或者如果$h>3$，如图2所示，那么对这个问题而言，这样所得到的直线未必是唯一解。

［解法二］ 这条直线通过两圆圆心(14, 92)和(19, 84)的对称中心(16.5, 88)，并且按题意要求划分两圆的面积。因此，该直线过(16.5, 88)和(17, 76)，它的斜率是

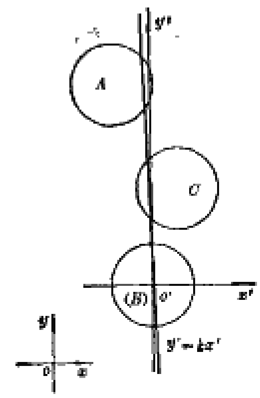
$$\frac{88-76}{16.5-17}=-24,$$

所以斜率的绝对值是24。

如图3所示，因为这条直线和半径从(14, 92)到(17, 92)的一个圆及半径从(16, 84)到(19, 84)的另一个圆相交(仅在比例上的不同)，所以解唯一。



(图 3)



(图 4)

［解法三］ 如图4所示，设在直角坐标系oxy中，圆心分别为$A(14, 92)$，$B(17, 76)$，$C(19, 84)$。作平移：

$$\begin{cases}x=x'+17,\\ y=y'+76.\end{cases}$$

则在新坐标系$o'x'y'$中，圆心坐标分别为

$$A(-3, 16),\ o'(0, 0),\ C(2, 8).$$

于是，问题归结为求直线

$$y'=kx'$$

的k的值。具体的解法同解法一。

7.［解］ 根据题意，与其直接求$f(84)$，不如从$n=1000$附近出发求$f(n)$的值有利。为了探索$n<1000$时的情况，因此利用函数f的递归定义，有

$$\begin{aligned}f(999)&=f[f(1004)]=f(1001)=998,\\ f(998)&=f[f(1003)]=f(1000)=997,\\ f(997)&=f[f(1002)]=f(999)=998,\\ f(996)&=f[f(1001)]=f(998)=997,\\ f(995)&=f[f(1000)]=f(997)=998.\end{aligned}\qquad ①$$

在上述基础上，可以作这样的猜测：

$$f(n)=\begin{cases}997, & \text{若 } n \text{ 是偶数且 } n<1000,\\ 998, & \text{若 } n \text{ 是奇数且 } n<1000.\end{cases}\qquad ②$$

下面利用归纳法证明②式。就是说，假定②式对$n+1, n+2, \cdots, 999$成立，证明②式对n也成立。

(1) 当$n=999, 998, \cdots, 995$时，由①式可知命题②成立。

(2) 假设对于所有的m($n<m<1000$, $n<995$)，②式都是成立的。现在证明当$m=n$时，②式成立。

由于，当 n 是偶数时，$n+5$ 是奇数，

$$\therefore \qquad f(n)=f[f(n+5)]=f(998)=997.$$

当 n 是奇数时，$n+5$ 是偶数，

$$\therefore \qquad f(n)=f[f(n+5)]=f(997)=998.$$

从而命题②得证。

特别地，当 $n=84$ 时，由②式得

$$f(84)=997.$$

8.［解法一］ 设 $W=Z^3$，则原方程化为

$$W^2+W+1=0,$$

解得

$$W_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad W_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

它们相应的幅角分别为 $120°$ 和 $240°$。于是，Z 的幅角有 6 个值：

$$\frac{120°}{3},\ \frac{120°+360°}{3},\ \frac{120°+720°}{3},$$

$$\frac{240°}{3},\ \frac{240°+360°}{3},\ \frac{240°+720°}{3}.$$

由此可见，仅仅第二个值 $160°$ 是介于 $90°$ 与 $180°$ 之间的一个幅角。

$$\therefore \qquad \theta=160°.$$

［解法二］ 用 $Z^3-1=0$ 乘以原方程，得

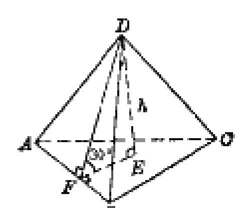
$$Z^9-1=0.$$

它的解是 9 个单位根：

$$Z_n=\cos(n\cdot 40°)+i\sin(n\cdot 40°),\ (n=0,1,2,\cdots,8)$$

其中只有 Z_3，Z_4 是在第二象限中。然而，$Z^3-1=0$ 的解各不相同，Z_3 是方程 $Z^3-1=0$ 的解，但它不是原方程的解。所以满足要求的根是 Z_4，它的幅角是 $160°$。

9.［解］ 如图所示，过 D 点作 AB 的垂线 DF，又过 D 点作底面 ABC 的垂线，即 D 点在底面的射影为 E 点，连结 FE，由三垂线定理的逆定理得



$$EF\perp AB.$$

$\therefore\quad \angle DFE=30°$（两面角的平面角）。

设 V 是四面体 $ABCD$ 的体积，h 是四面体的顶点 D 到底面的高，则

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h.$$

$$\because\quad DF\perp AB,\qquad \therefore\quad DF=\frac{2S_{\triangle ABD}}{AB}=8.$$

$\because\quad \triangle DEF$ 的三个内角分别是 $30°$，$60°$ 和 $90°$，

$\therefore\quad$ 在直角三角形 DEF 中，$h=DF\sin 30°=4$。

从而得

$$V=\frac{1}{3}\times 15\times 4=20(\text{立方厘米}).$$

10.［解］ 由题意得 $\qquad S=30+4C-W>80.$

于是，这问题就归结为找出能使 C 唯一确定的 S 最低值。为此目的，首先必须使 $C+W\geqslant 26$。 ①

若 $C+W\leqslant 25$，由于答对的题数增加 1，答错的题数增加 4，得分还是和原来的相同，则得

$$(C+1)+(W+4)\leqslant 30.$$

可见，C 就不唯一。其次，必须使 $W\leqslant 3$。 ②

如果 $W>4$，由于答错的题数减少 4，答对的题数减少 1，仍然获得同样的得分。（后者是可能的，因为 $S>80$，意味着 $C\geqslant 13$）

现在对于最小值 S，我们必须取最小值 C 和最大值 W。从而由①和②式得 $\qquad W=3,\ C=23.$

∴ $$S=30+4\times 23-3=119.$$

11. [解] 根据题意，总的基本事件数为 $12!$，k 是没有两棵白桦树相邻的排列种数，则

$$P(k)=\frac{k}{12!}.$$

现在我们借助图形来计算 k。

$$\underline{\ 1\ }N\underline{\ 2\ }N\underline{\ 3\ }N\underline{\ 4\ }N\underline{\ 5\ }N\underline{\ 6\ }N\underline{\ 7\ }N\underline{\ 8\ }$$

上述 7 个 N 表示非白桦(即枫、橡)树，而 7 棵树排列有 $7!$，又 7 个 N 有 8 个空档。现将 5 棵白桦树种入 8 个空档有 C_8^5 种，且 5 棵白桦树排列有 $5!$，于是

$$P(k)=\frac{7!\,C_8^5\times 5!}{12!}=\frac{7}{99}.$$

∴ $$m+n=106.$$

12. [解] 由题意，我们发现：

$$f(x)=f(2+(x-2))=f(2-(x-2))=f(4-x), \quad ①$$

和
$$f(4-x)=f(7-(x+3))=f(7+(x+3))=f(x+10). \quad ②$$

由方程①和②得
$$f(x)=f(x+10). \quad ③$$

在方程③中，x 用 $x+10$ 代替，然后 x 用 $x-10$ 代替，得

$$f(x+10)=f(x+20)$$

和
$$f(x-10)=f(x).$$

连续用这个方法，得

$$f(x+10n)=f(x),\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots. \quad ④$$

∵ $f(0)=0$，∴ 方程④为

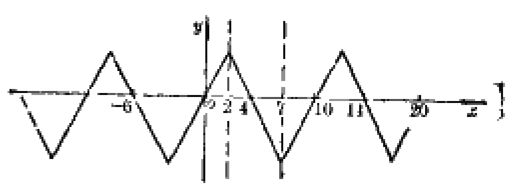
$$f(\pm 10)=f(\pm 20)=\cdots=f(\pm 1000)=0.$$

所以在闭区间 $[-1000,1000]$ 上满足方程 $f(x)=0$ 的根的个数是 201。

其次，在①式中，令 $x=0$，得

$$f(4)=f(0)=0.$$

因此，在方程④中，令 $x=4$，对于 $f(x)=0$，在 $x=-996,\ -986,\ \cdots,\ -6,\ 4,\ 14,\ \cdots 994$，我们又获得 200 个根。由下面锯齿形的函数图象可见，满足已知条件的根有这些，并且除此之外没有其它的根，所以根的个数是 401。又因为 $f(x)$ 是以 10 为周期的函数，每一周期中有 2 个根，所以在闭区间 $[-1000,1000]$ 中，只有 401 个根。从而证明 401 是根的个数 N 的最小值。



13. [解] 设
$$A=\operatorname{arc\,ctg} 3,\quad B=\operatorname{arc\,ctg} 7,$$
$$C=\operatorname{arc\,ctg} 13,\ D=\operatorname{arc\,ctg} 21. \quad ①$$
$$E=A+B,\qquad F=C+D. \quad ②$$

考虑①和②，这个问题等价于求 $10\operatorname{ctg}(E+F)$ 的值。

一般说来，
$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y-1}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}. \quad ③$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x,\ x\in R,\ \operatorname{arc\,ctg} x\in(0,\ \pi). \quad ④$$

利用上述①、④，得

$$\operatorname{ctg} E=\operatorname{ctg}(A+B)=\frac{3\times 7-1}{3+7}=2,$$

$$\operatorname{ctg} F=\operatorname{ctg}(C+D)=\frac{13\times 21-1}{13+21}=8,$$

$$\operatorname{ctg}(E+F)=\frac{2\times 8-1}{2+8}=\frac{3}{2}.$$

从而得

$$10\operatorname{ctg}(E+F)=15.$$

14.〔解法一〕 我们知道，末位数分别是 5, 7, 9, 1 和 3 的最小奇合数是 15, 27, 9, 21, 33。

(1) 以上各数中，任意两数之和不等于 38.

(2) 大于 38 的偶整数 k 可以写成两个奇合数之和：

若 k 的末位是 0(即 40, 50, ……)，则 $k=15+5n$，

若 k 的末位是 2(即 42, 52, ……)，则 $k=27+5n$，

若 k 的末位是 4(即 44, 54, ……)，则 $k=9+5n$，

若 k 的末位是 6(即 46, 56, ……)，则 $k=21+5n$，

若 k 的末位是 8(即 48, 58, ……)，则 $k=33+5n$。

其中 n 是大于 1 的奇整数。

故不能写成两个奇合数之和的最大偶整数是 38.

〔解法二〕 首先观察 $6n+9(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ 是一个奇合数。现将偶正整数的集合以 6 为模，分成三个剩余类，且在下列每种情况下，表明对某些非负整数 n，偶整数 k 可以分解为两个奇合数之和：

若 $k\equiv 0(\bmod 6)$ 且 $k\geqslant 18$，则 $k=9+(6n+9)$，

若 $k\equiv 2(\bmod 6)$ 且 $k\geqslant 44$，则 $k=35+(6n+9)$，

若 $k\equiv 4(\bmod 6)$ 且 $k\geqslant 34$，则 $k=25+(6n+9)$，

这是大于 38 的偶整数所有的情况。因此，38 即为所求的解。

15.〔解法一〕 原方程组与方程

$$\frac{x^2}{t-1}+\frac{y^2}{t-9}+\frac{z^2}{t-25}+\frac{w^2}{t-49}=1 \qquad ①$$

等价。这里 $t=4, 16, 36$, 和 64.

当 $t\neq 1, 9, 25$ 和 49 时，方程①等价于

$$(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)-x^2(t-9)(t-25)(t-49)-y^2(t-1)(t-25)(t-49)$$
$$-z^2(t-1)(t-9)(t-49)-w^2(t-1)(t-9)(t-25)=0. \qquad ②$$

上述等式的左边是 t 的四次多项式，它至多有 4 个根。因为 $t=4, 16, 36$ 和 64 是已知的根，它必定是四次多项式的全部根。故②式等价于方程

$$(t-4)(t-16)(t-36)(t-64)=0. \qquad ③$$

因为在方程②和③中，t^4 的系数是 1，可以断定其它 t 的幂的系数也必须是同样的，为此考虑 t^3 的系数相等。我们有

$$1+9+25+49+x^2+y^2+z^2+w^2=4+16+36+64.$$

$$\therefore \qquad x^2+y^2+z^2+w^2=36.$$

〔解法二〕 根据解一，可知②、③表示同一方程，所以②和③的左边相等。

当 $t=1$ 时，得 $x^2=\dfrac{11025}{1024}$，

$t=9$ 时，得 $y^2=\dfrac{10395}{1024}$，

$t=25$ 时，得 $z^2=\dfrac{9009}{1024}$，

$t=49$ 时，得 $w^2=\dfrac{6435}{1024}$。

显然这些值确实满足原方程组，且

$$x^2+y^2+z^2+w^2=36.$$

第三届美国数学邀请赛试题(1985年)

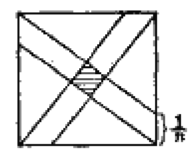
1. 假设 $x_1=97$，对 $n>1$ 时，$x_n=\frac{n}{x_{n-1}}$。计算乘积

$$x_1x_2\cdots x_8.$$

2. 一个直角三角形围绕一条直角边旋转，所得锥体的体积为 800π 立方厘米．这三角形的斜边多少长(以厘米为单位)？

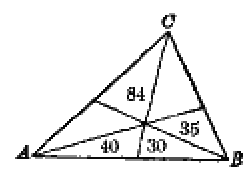
3. 设 a，b 与 c 为正整数，且满足等式：$c=(a+bi)^3-107i$，其中 $i^2=-1$。求 c 的值。

4. 在一个面积为1的正方形中构作一个如下的小正方形：将单位正方形的每条边作 n 等分，然后将每个顶点和它相对的顶点最接近的分点连接起来，如果小正方形(图中的阴影部分)的面积恰为 $\frac{1}{1985}$，求 n 的值。



5. 选取一列整数 a_1，a_2，a_3，…，使得对每个 $n\geqslant3$，都有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$。若该数列前1492项之和等于1985，前1985项之和等于1492．那么前2001项之和是多少？

6. 如图所示，将 $\triangle ABC$ 的三个顶点与同一个内点连接起来，所得三条联线把 $\triangle ABC$ 分成六个小三角形，其中四个小三角形的面积已在图上标明．试求 $\triangle ABC$ 的面积。



7. 设 a，b，c 与 d 都是正整数，且 $a^5=b^4$，$c^3=d^2$，$c-a=19$。求 $d-b$。

8. 下列7个数的和恰为19：

$$a_1=2.56,\ a_2=2.61,\ a_3=2.65,\ a_4=2.71,\ a_5=2.79,\ a_6=2.82,\ a_7=2.86.$$

现在要求，每一个 a_i 被一个整数 A_i 取代，$1\leqslant i\leqslant7$，这些 A_i 的和仍为19，并且"误差" $|A_i-a_i|$ 的最大值 M 要尽可能地小．对最小的 M，$100M$ 是多少？

9. 在一个圆中，长度为2，3及4的三条弦所对的圆心角弧度数分别为 α，β 及 $\alpha+\beta$，其中 $\alpha+\beta<\pi$。若 $\cos\alpha$ 是一个正的有理数，那么当 $\cos\alpha$ 表示成一个既约分数时，它的分子与分母的和是多少？

10. 前1000个正整数中可以表示成下列形式：

$$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$$

的正整数有多少个？其中 x 是某一个实数，$[z]$ 记小于或等于 z 的最大整数。

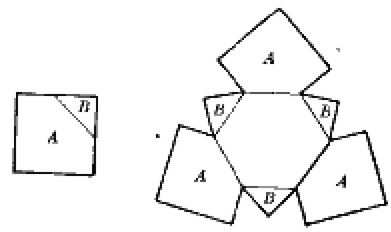
11. 在 xy 平面中一个椭圆的两个焦点为 $(9,20)$ 与 $(49,55)$，且椭圆与 x 轴相切。这椭圆的长轴多少长？

12. 设 A，B，C 与 D 是一个正四面体的顶点，每条棱长1米。一只小虫从顶点 A 出发，遵照下列规则爬行：在每一个顶点，它在相交于该顶点的三条棱中选取一条，每条棱被取到的可能性都相等，然后它沿着这条棱爬到另一个顶点．设小虫爬行7米路之后，它又回到顶点 A 的概率为 $P=\frac{n}{729}$。求 n 的值。

13. 数列 101, 104, 109, 116, …的通项公式为 $a_n=100+n^2$，其中 $n=1, 2, 3, \cdots$。对每个 n，以 d_n 记 a_n 与 a_{n+1} 的最大公因子。试求：当 n 取遍正整数时，d 的最大值。

14. 在一次比赛中，每一个选手与别的选手恰好都比赛一局。在每一局比赛中，胜的选手得 1 分，败的选手得 0 分，平局时每人得 $\frac{1}{2}$ 分。比赛结束后发现，每一个选手所得的分数中恰有一半是在与得分最少的十名选手的赛局中得到的。（特别是，得分最少的十名选手中的每一个所得分数的一半是在与这十名选手中其余九名的赛局中得到的。）这次比赛中选手的总数是多少？

15. 有三个 12 厘米×12 厘米的正方形。如右边左图所示，连接相邻两边的中点，把每一个正方形分割成 A 与 B 两块。然后如右图所示，将这六块粘附于一个正六边形，折叠成一个多面体。这多面体的体积是多少（以立方厘米为单位）？



解　　答

1.［解］ ∵ $$x_{n-1}x_n=n,$$

∴ $$x_1x_2=2,\ x_3x_4=4,\ x_5x_6=6,\ x_7x_8=8.$$

∴ $$x_1x_2\cdots x_8=2\times4\times6\times8=384.$$

2.［解］ 设直角三角形的两直角边分别为 a 和 b，斜边为 c，则

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}ba^2=800\pi, & ①\\[2mm] \dfrac{\pi}{3}ab^2=1920\pi. & ②\end{cases}$$

由①÷②，得 $\frac{a}{b}=\frac{5}{12}$ 即 $a=\frac{5}{12}b$。

于是有 $$a^3=\frac{5}{12}ba^2=\frac{5}{12}(800\times3)=1000.$$

∴ $a=10$，$b=24$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=26$（厘米）。

3.［解］ $$c=(a+bi)^3-107i=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3-107)i.$$

根据题意，a，b 与 c 为正整数，则

$$3a^2b-b^3-107=0,$$
$$b(3a^2-b^2)=107.$$

∵ 107 是质数，

∴ $$b=1 \text{ 且 } 3a^2-b^2=107, \quad ①$$
$$b=107 \text{ 且 } 3a^2-b^2=1. \quad ②$$

由①得 $$3a^2=108,$$

∴ $$a^2=36,\ a=6.$$

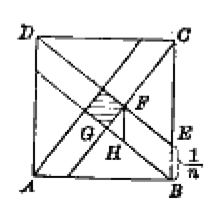
由②得 $3a^2=1+b^2$，即 $3a^2=1+107^2$。

因为 $1+107^2$ 不是 3 的倍数，所以与 a 为正整数矛盾。

∴ $$c=a^3-3ab^2=6(6^2-3\times1^2)=198.$$

4.［解法一］ 如图 1，过点 F 作 EB 的平行线 FH。

由 $\triangle FGH \backsim \triangle DCE$，得



（图 1）

$$\frac{FG}{FH}=\frac{DC}{DE}.$$

$$FG^2=\frac{DC^2}{DE^2}\cdot FH^2$$

从而有

$$\frac{1}{1985}=\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

即

$$2n^2-2n+1=1985,$$

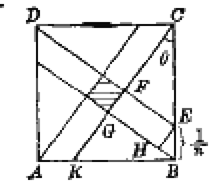
$$2(n-32)(n+31)=0.$$

∵ n 是正数， ∴ $n=32$。

〔解法二〕 如图 2，过点 E 作 CG 的平行线 EH。设 $\angle BCK=\theta$，则在 $\triangle BCK$ 中，

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{KB}{CB}=\frac{n-1}{n}.$$

在 $\triangle BEH$ 中，$\frac{EH}{HB}=\mathrm{ctg}\,\theta$，$HB=EH\,\mathrm{tg}\,\theta$。



（图 2）

∵

$$EH^2+HB^2=\frac{1}{n^2},$$

即

$$\frac{1}{1985}+\frac{1}{1985}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2},$$

$$n^2-n-992=0,$$

$$(n-32)(n+31)=0.$$

而 n 是正数，所以 $n=32$。

5. 〔解法一〕 设 $a_1=a$，$a_2=b$，则 $a_3=b-a$，$a_4=-a$，$a_5=-b$，$a_6=a-b$。

数列 $\{a_n\}$ 为：$a, b, b-a, -a, -b, a-b, a, b, b-a, -a, -b, a-b, \cdots$，由此可知，该数列的任何依次的六项之和是零。于是有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{1488})+a_{1489}+a_{1490}+a_{1491}+a_{1492}=a+b+b-a-a=1985,$$

∴

$$2b-a=1985. \quad ①$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{1980})+a_{1981}+a_{1982}+a_{1983}+a_{1984}+a_{1985}=a+b+b-a-a-b=1492,$$

∴

$$b-a=1492. \quad ②$$

由①，②解得

$$b=493.$$

因此

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{1998})+a_{1999}+a_{2000}+a_{2001}=a+b+b-a=2b=2\times493=986.$$

〔解法二〕 由递推式 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，得

$$a_{n+6}=a_n.\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

具体地，

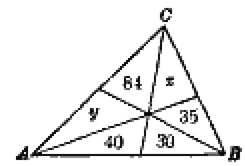
$$a_n=\begin{cases}a_1, & 若\ n=1,7,13,\cdots,\\ a_2, & 若\ n=2,8,14,\cdots,\\ a_2-a_1, & 若\ n=3,9,15,\cdots,\\ -a_1, & 若\ n=4,10,16,\cdots,\\ -a_2, & 若\ n=5,11,17,\cdots,\\ a_1-a_2, & 若\ n=6,12,18,\cdots.\end{cases}$$

因为该数列的任何依次的六项之和是零。若设 S_n 为该数列的前 n 项的和，则

$$S_n=\begin{cases}a_1, & 若\ n=1,7,13,\cdots,\\ a_1+a_2, & 若\ n=2,8,14,\cdots,\\ 2a_2, & 若\ n=3,9,15,\cdots,2001,\cdots,\\ 2a_2-a_1, & 若\ n=4,10,16,\cdots,1492,\cdots,\\ a_2-a_1. & 若\ n=5,11,17,\cdots,1985,\cdots,\\ 0, & 若\ n=6,12,18,\cdots.\end{cases}$$

因此 $$S_{1985}=a_2-a_1=1492,$$
$$S_{1492}=2a_2-a_1=1985.$$
从而得 $$a_2=493.$$
∴ $$S_{2001}=2a_2=986.$$

6.［分析］ 我们知道，若两个三角形有相同的高，则它们的面积的比等于它们的底边的比。由此可得如下的解法。



［解］ 不妨设另外两个小三角形的面积分别为 x，y。则有方程

$$\frac{40}{30}=\frac{40+y+84}{30+35+x}, \qquad ①$$
$$\frac{35}{x}=\frac{35+30+40}{x+84+y}, \qquad ②$$
$$\frac{84}{y}=\frac{84+x+35}{y+40+30}. \qquad ③$$

解①，②的联立方程，得

$$x=70,\ y=56.$$

且这些值也满足方程③。

∴ $$S_{\triangle ABC}=30+35+70+84+56+40=315.$$

7.［解］ 因为正整数的质因数分解是唯一的，且指数 4 是相对于质数5；指数 2 是相对于质数 3，所以一定存在正整数 m 和 n，使得

$$a=m^4,\ b=m^5,\ c=n^2 \text{ 和 } d=n^3, \text{则}$$
$$19=c-a=n^2-m^4=(n-m^2)(n+m^2).$$

∵ 19是质数，且 $(n-m^2)<n+m^2$，

∴ $$\begin{cases}n-m^2=1,\\ n+m^2=19.\end{cases}$$

从而解得 $m=3$，$n=10$，$d=1000$，$b=243$。

∴ $$d-b=1000-243=757.$$

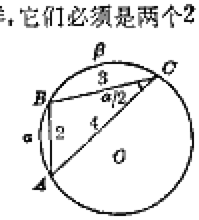
8.［解］ 首先，对每一个 A_i 是 2 或 3，则 $M<1$；对于 A_i 的任何其它选择，则 $M>1$。

其次，对于这 7 个整数的和是 19，只有一个方式，也就是它们各自为 2 或 3。这样，它们必须是两个2，五个 3。

鉴于上述观点，为了使M尽可能小。因此，我们经比较，得

$$M=\max\{|a_2-2|,\ |a_3-3|\}=\max\{0.61,\ 0.35\}=0.61.$$

∴ $$100M=61.$$

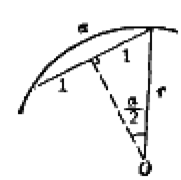


(图 1)

9.［解法一］ 如图 1，$AB=2$，$BC=3$，且 $\widehat{AC}=\alpha+\beta$，$AC=4$，$\angle ACB=\frac{\alpha}{2}$。则有

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\times AC\cdot BC}=\frac{7}{8},$$
$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{17}{32}.$$

∴ $$17+32=49.$$



(图 2)

［解法二］ 如图 2，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{r}$，$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{3}{2r}$，$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{r}$。

∵ $$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

即 $$\frac{2}{r}=\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{9}{4r^2}}+\frac{3}{2r}\sqrt{1-\frac{1}{r^2}},$$
$$\frac{1}{r^2}=\frac{15}{64}.$$

∴ $$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{17}{32}.$$

∴ $$17+32=49.$$

10．〔证法一〕 设 $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$，n 为整数，$[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数，则 x 可取以下实数：

(1) 当 $x=\frac{n}{2}+\frac{1}{8}$ 时，则

$$f(x)=\left[n+\frac{1}{4}\right]+\left[2n+\frac{1}{2}\right]+\left[3n+\frac{3}{4}\right]+[4n+1]=10n+1.$$

(2) 当 $x=\frac{n}{2}+\frac{1}{6}$ 时，则

$$f(x)=\left[n+\frac{1}{3}\right]+\left[2n+\frac{2}{3}\right]+[3n+1]+\left[4n+1+\frac{1}{3}\right]=10n+2.$$

(3) 当 $x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$ 时，则

$$f(x)=\left[n+\frac{1}{2}\right]+[2n+1]+\left[3n+1+\frac{1}{2}\right]+[4n+2]=10n+4.$$

(4) 当 $x=\frac{n}{2}+\frac{1}{3}$ 时，则

$$f(x)=\left[n+\frac{2}{3}\right]+\left[2n+1+\frac{1}{3}\right]+[3n+2]+\left[4n+2+\frac{2}{3}\right]=10n+5.$$

(5) 当 $x=\frac{n}{2}+\frac{2}{5}$ 时，则

$$f(x)=\left[n+\frac{4}{5}\right]+\left[2n+1+\frac{3}{5}\right]+\left[3n+2+\frac{2}{5}\right]+\left[4n+3+\frac{1}{5}\right]=10n+6.$$

(6) 当 $x=\frac{n}{2}$ 时，则

$$f(x)=[n]+[2n]+[3n]+[4n]=10n.$$

∴ 当 $0\leqslant n\leqslant 100$ 的整数时，必有上述 6 种情况中的一种成立，即个位数为 0，1，2，4，5，6 的均可表示。所以前 1000 个整数中有 $1000\times\frac{6}{10}=600$ 个正整数可以表示成 $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ 的形式。

现证明 $f(x)=10n+3$ 不可能成立。设 $x=\frac{n}{2}+y$（y 为实数）。

∴ $$f(x)=10n+[2y]+[4y]+[6y]+[8y].$$

(1) 若 $[4y]=1$，$[6y]=1$，$[8y]=1$，$[2y]=0$（不必讨论），则

$$[4y]:\quad \frac{1}{4}\leqslant y<\frac{1}{2}, \qquad ①$$

$$[6y]:\quad \frac{1}{6}\leqslant y<\frac{1}{3}, \qquad ②$$

$$[8y]:\quad \frac{1}{8}\leqslant y<\frac{1}{4}. \qquad ③$$

显然，①与③没有公共交点，所以情况(1)不可能成立。

同理，(2)若 $[2y]=0$，$[4y]=0$，$[6y]=1$，$[8y]=2$，可推得 $[4y]=0$ 与 $[8y]=2$ 是矛盾。

所以末位数是 3 不可能成立。同理可推得末位数是 7，8，9 也不可能成立。

〔证法二〕 令 $$f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x] \qquad ①$$

如果 n 是整数，则从①可知：

$$f(x+n)=f(x)+20n. \qquad ②$$

如果某个整数 k 可以表示为 $f(x_0)$，其中 x_0 为某一实数，则由②，对于 $n=1, 2, 3, \cdots$，

$$k+20n=f(x_0)+20n=f(x_0+n),$$

即 $k+20n$ 也可以表示为①的形式．由此，当 x 在 $(0, 1]$ 中变化时，$f(x)$ 可能产生前 20 个正整数中的

几个。

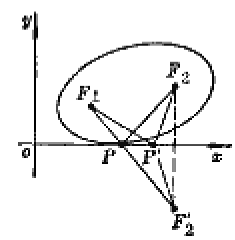
其次，如果让x增加，那么仅当$2x$，$4x$，$6x$，$8x$达到某个整数值时$f(x)$才会改变，而且总是变成某个较大的整数。在$(0, 1]$中，这种变化恰好发生于下述情况：即x具有$\frac{m}{n}$的形成，其中$1 \leqslant m \leqslant n$，而$n = 2$，4，6或8。共有12个这样的分数，从小到大排列：

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{8},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8} \text{和} 1.$$

因此，前20个正整数中只有12个可以表示为所要求的形式，因为$1000 = 50 \times 20$，由②可知前1000个正整数共分成50段，每段连续20个相邻的正整数。故适合要求的数总共有$50 \times 12 = 600$个。

11. ［分析］ 本题可归结为："在x轴上求一点P，使它到椭圆的两个焦点F_1，F_2的距离之和为最小"。这里所求的点P就是椭圆与x轴相切的切点。而最小值就是所要求的椭圆长轴的长。或者根据椭圆上的一条切线与切点连接焦点的两直线所夹之角相等这一性质，然后由椭圆定义求得长轴的长。

［解法一］ 如图，设$F_1(9, 20)$，$F_2(49, 55)$，F_2关于x轴的对称点为F_2' $(49, -55)$，则所要求的椭圆长轴的长，就是F_1和F_2'的两点间的距离：



$$|F_1F_2'| = \sqrt{(49-9)^2 + (-55-20)^2} = 85.$$

注：这里$|F_1F_2'|$即为点P到椭圆的焦点F_1和F_2的距离之和的最小值。这是因为在ox轴上任取一点$P'(P' \neq P)$，有

$$|P'F_1| + |P'F_2'| > |F_1F_2'| = |PF_1| + |PF_2|,$$

即三角形两边之和大于第三边，所以$|F_1F_2'|$为最小。

［解法二］ 设切点$P(x, 0)$。则根据"椭圆上的一条切线与切点连接焦点的两直线所夹之角相等"。有

$$\frac{55}{49-x} = \frac{20}{x-9},$$

∴ $$x = \frac{59}{3},\quad P\left(\frac{59}{3}, 0\right).$$

从而有 $$|PF_1| = \sqrt{\left(\frac{59}{3} - 9\right)^2 + 20^2} = \frac{68}{3},$$

$$|PF_2| = \sqrt{\left(\frac{59}{3} - 49\right)^2 + 55^2} = \frac{187}{3}.$$

∴ $$|PF_1| + |PF_2| = \frac{68}{3} + \frac{187}{3} = 85.$$

12. ［解法一］ 设从A点出发，第n米回到顶点A的走法有a_n种，则第$(n-1)$米后回到顶点A的走法有a_{n-1}种，这种走法是第n米走不到顶点A的。而走$(n-1)$米共有3^{n-1}种不同走法。而第$(n-1)$米不在顶点A处的走法却能在第n米以唯一的方法到达顶点A。所以$a_n = 3^{n-1} - a_{n-1}$。可以证明：

$$a_n = \frac{1}{4}[3^n + 3(-1)^n].$$

当$n = 7$时， $$a_7 = \frac{3^7 - 3}{4} = 3 \times 182.$$

因为走7米共有3^7种走法，所以小虫爬行7米路之后，它又回到顶点A的概率为

$$P = \frac{a_7}{3^7} = \frac{182}{729}.$$

∴ $$n = 182.$$

［解法二］ 对$n = 0, 1, 2, \cdots$，令$P(A_n) = P_n$是小虫从A点出发，爬行恰好n米的概率。则

$$P(A_{n+1}) = P(\bar{A}_n)P(A|\bar{A}_n),$$

即 $$P_{n+1} = (1 - P_n) \times \frac{1}{3}. \qquad ①$$

∵ $P_0 = 1$（即小虫开始在顶点A），

由①式，得

$$P_1=0,\ P_2=\frac{1}{3},\ P_3=\frac{2}{9},\ P_4=\frac{7}{27},\ P_5=\frac{20}{81},$$

$$P_6=\frac{61}{243}\ 和\ P=P_7=\frac{182}{729}.$$

∴ $$n=182.$$

13．［解法一］ 对 a_{n+1} 与 a_n 施行辗转相除法如下：

$$\begin{array}{r|l} n^2+2n+101 & n^2+100 \\ n^2\quad\ \ +100 & \overline{\ 1\ } \\ \hline 2n+1 & \end{array}$$

把 a_n 乘以 2，再用 $2n+1$ 来除：

$$\begin{array}{r|l} 2n^2+200 & 2n+1 \\ 2n^2+n & \overline{n-1} \\ \hline -n+200 & \\ (乘以2) & \\ -2n+400 & \\ -2n-1 & \\ \hline 401 & \end{array}$$

∴ d_n 的最大值是 401。

［解法二］ 我们先给出更一般的结论：

若 a 是一个正整数，d_n 是 $a+n^2$ 和 $a+(n+1)^2$ 的最大公因子，则当 $n=2a$ 时，d_n 的最大值是 $4a+1$。

于是对于本题数列的通项公式 $a_n=100+n^2$ 中，$a=100$，因此，d_n 的最大值是 $4\times100+1=401$。

现证明上述的结论。若 $d_n|a+(n+1)^2$，$d_n|a+n^2$，则

$$d_n|[a+(n+1)^2-(a+n^2)]=2n+1. \quad ①$$

∵ $$2(a+n^2)=n(2n+1)+(2a-n),$$

由①得 $$d_n|(2a-n), \quad ②$$

由①，②得 $$d_n|[(2n+1)+2(2a-n)],$$

即 $$d_n|(4a+1).$$

从而 $1\leqslant d_n\leqslant 4a+1$，$4a+1$ 可能是 d_n 的最大值。

因为对于 $n=2a$，我们有 $a+n^2=a+(2a)^2=a(4a+1)$，

$$a+(n+1)^2=a+(2a+1)^2=(a+1)(4a+1).$$

∴ $4a+1$ 是 d_n 的最大值。

14．［解］ 设这次比赛中选手的总数为 n，由于每一局比赛中，不管哪一个选手是胜或是败或两人平局，两人得分的和总是 1 分。因此，n 名选手所得总分是 C_n^2，于是，根据题意，有

$$C_n^2=2C_{10}^2+2C_{n-10}^2,$$

即 $$n(n-1)=90+(n-10)(n-11),$$

$$n^2-41n+400=0,$$

$$(n-16)(n-25)=0.$$

∴ $$n=16\ 或\ 25.$$

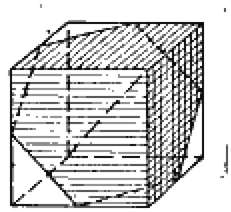
如果 $n=16$（即在这次比赛中有 16 名选手），那么胜的仅有 6 名，他们的总分是 30 分，平均每人得 5 分，而得分最少的十名选手的总分却是 90 分，平均每人得 9 分，由此得出矛盾。

∴ $$n=25.$$

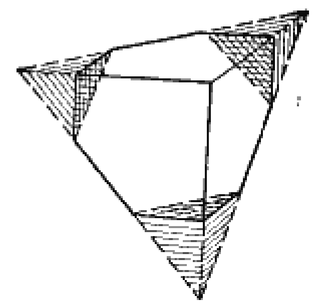
15．［解法一］ 折叠成的多面体如图 1 中的阴影部所示。由于该多面体的底是个正六边形，而这个正

六边形就是通过正方体的对角线的中点,且与对角线垂直的平面和该正方体相截所得的截面。而这截面将正方体分为体积相等的两个多面体。所以折叠成的多面体的体积是

$$\frac{1}{2}\times 12^3=864(\text{立方厘米})。$$



(图 1)



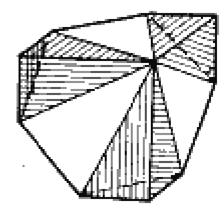
(图 2)

〔解法二〕 如图 2,所折叠成的多面体的体积是由一个棱长为 18 厘米的正四面体减去三个体积相等,且棱长为 6 厘米的正四面体(图中的阴影部分)所组成。即

$$\frac{1}{6}\times 18^3-3\times\frac{1}{6}\times 6^3=864(\text{立方厘米})。$$

〔解法三〕 如图 3,所折叠成的多面体的体积是由一个正六棱锥和三个体积相等,且底面为直角三角形,高为正方体的棱长的三棱锥(图中的阴影部分)所组成,所以折叠成的多面体体积是

$$\frac{1}{3}\times 108\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}+3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6^2\times 12=864(\text{立方厘米})。$$



(图 3)

第四届美国数学邀请赛试题(1986年)

1. 方程$\sqrt[4]{x}=\frac{12}{7-\sqrt[4]{x}}$的解之和是多少？

2. 求乘积$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$的值。

3. 若$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=25$，$\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=30$，求$\operatorname{tg}(x+y)$。

4. 若x_1，x_2，x_3，x_4和x_5满足下列方程组：

$$2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6,$$
$$x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=12,$$
$$x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=24,$$
$$x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=48,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=96.$$

确定$3x_4+2x_5$的值。

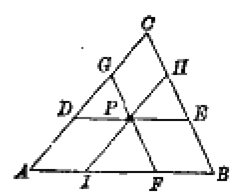
5. 使n^3+100能被$n+10$整除的正整数n的最大值是多少？

6. 一本书的页码是从1记到n。把所有这些页码加起来的时候，其中有1个页码错被加了两次，结果所得不正确的和是1986。这个被加了两次的页码是多少？

7. 递增数列1，3，4，9，10，12，13，…由一些正整数组成，它们或者是3的幂，或者是若干个不同的3的幂之和。求此数列的第100项(其中1是第1项，3是第2项，等等)。

8. 设S是1000000的所有真因子的对数(以10为底)之和。(一个自然数的真因子，就是指不同于1和该数本身的正整数因子)最接近于S的整数是多少？

9. 在$\triangle ABC$中，$AB=425$，$BC=450$，$CA=510$，如下图所示。P是一个内点，线段DE，FG和HI的长均为d，交于P，且分别平行于边AB，BC和CA，求d。



10. 在一种室内游戏中，魔术师要求一个参加者想好一个三位数(abc)，a，b，c分别是十进位记数法中的百位数，十位数和个位数。然后，魔术师要求此人记下五个数：(acb)，(bac)，(bca)，(cab)，(cba)，并把它们加起来，求出和N。如果讲出N值是多少，魔术师能识别出原来数(abc)是什么。

请你扮演这位魔术师，并且确定出(abc)是什么，如果$N=3194$。

11. 多项式$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$可以写成下列形式

$$a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17},$$

其中$y=x+1$，$a_i(i=0,1,2,\cdots,17)$都是常数。

求a_2的值。

12. 定义一个数集的和就是这个集的所有元素的和。设S是一些不大于15的正整数组成的集，假设S的任意两个不相交的子集有不相同的和，具有这个性质的集合S的和的最

大值是多少？

13. 在掷硬币所得结果序列中，可以数出一个反面继以一个正面（记为"反正"）的次数，一个正面继以一个正面（记为"正正"）的次数，一个反面继以一个反面（记为"反反"）的次数，一个正面继以一个反面（记为"正反"）的次数。例如，掷硬币十五次的结果序列为

正正反反正正正正反正正反反反反，

其中有5个"正正"，3个"正反"，2个"反正"，4个"反反"。掷硬币十五次，有多少种不同的结果序列，它们都恰好有2个"正正"，3个"正反"，4个"反正"和5个"反反"？

14. 一个长方体（一只盒子）P 的一条对角线和与它不相交的棱之间的最短距离分别是 $2\sqrt{5}$，$\frac{30}{\sqrt{13}}$ 和 $\frac{15}{\sqrt{10}}$。求 P 的体积。

15. 在 xoy 平面内，设 $\triangle ABC$ 是以 C 为直角的直角三角形。斜边 AB 的长度为60，通过 A 和 B 的中线分别位于直线 $y=x+3$ 和 $y=2x+4$ 上。求 $\triangle ABC$ 的面积。

解　答

1. ［解］ 设 $y=\sqrt[4]{x}$。则原方程为

$$y^2-7y+12=0,$$

解之得　$y=3,y=4$。

从而　$x=3^4,x=4^4$，所以原方程的解之和是337。

2. ［解］ 根据 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，则

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})=(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2=4+2\sqrt{30},$$

$$(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2=-4+2\sqrt{30}.$$

因此，所求乘积的值是

$$(4+2\sqrt{30})(-4+2\sqrt{30})=(2\sqrt{30})^2-4^2=104.$$

3. ［解］ 将 $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$ 乘以 $\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=30$ 的两边，得

$$\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x=30\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y,$$

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$$

因此
$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{25}{1-\frac{5}{6}}=150.$$

4. ［解］ 将已知的五个方程相加，然后，在所得的方程两边除以6，得

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=31. \tag{*}$$

由第四、第五个方程分别减去方程(*)，得

$$x_4=17,\ x_5=65$$

∴
$$3x_4+2x_5=181.$$

5. ［解］ 根据题意，由 $n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900$，可知，若 n^3+100 能被 $n+10$ 整除，则900也能被 $n+10$ 整除。而且，当 $n+10$ 的值为最大时，相应地 n 的值为最大。因为900的最大因子是900，所以 $n+10=900$，$n=890$。

6. ［解］ 设被错加了两次的页码为 k。则 $0<k<n+1$，并且 $1+2+\cdots+n+k$ 是在 $1+2+\cdots+n$ 和 $1+2+\cdots+n+(n+1)$ 之中。换句话说，

$$\frac{n(n+1)}{2}<1986<\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

即 $$n(n+1)<3972<(n+1)(n+2).$$

由尝试法(显然 n 比 60 大一些)得 $n=62$，所以

$$k=1986-\frac{62\times 63}{2}=33.$$

7.〔解〕 如果使用前六个 3 的非负整数幂，即 1、3、9、27、81 和 243，那么可以组成不同的 3 的幂之和，共有

$$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6-1=63,$$

即 63 项。这递增数列的第 64 项就是 $3^6=729$，然而，自 729 起，被加数中不含有 243 的不同的 3 的幂之和，有

$$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=32,$$

即 32 项。这样，我们产生了此数列的前 95 项。因为要求此数列的第 100 项，于是从第 96 项起，必含有 243。而第 96，97，…，第 100 项分别是：$729+243$，$729+243+1$，$729+243+3$，$729+243+3+1$ 和 $729+243+9=981$。所以，此数列的第 100 项是 981。

8.〔解〕 数 $1000000=(2^6)(5^6)$ 有 $(6+1)(6+1)=49$ 个不同的正因子，并且它们具有 $(2^i)(2^j)$ 的形式。

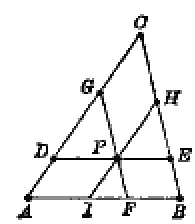
对于 $i(i=0,1,2,\cdots,6)$ 有 7 种选择，对于 j 同样有 7 种选择。除 1000 外，其它 48 个因子构成 24 对，每一对因子的积是 1000000。其中 1 和 1000000 这对是非真因子，故舍去。由此可见，1000000 的所有真因子的积是

$$(1000)(1\,000\,000)^{23} \text{ 或 } 10^{141}.$$

而 S 是 1 000 000 的所有真因子的对数(以 10 为底)之和。它等于这些真因子的积的对数，即

$$S=\lg 10^{141}=141.$$

由此可知，最接近于 141 的整数，显然是 141。



9.〔解〕 如图，

$$EH=BC-(BE+HC)=BC-(FP+PG)=450-d.$$

同样，
$$GD=510-d.$$

由 $$\triangle DPG\backsim\triangle ABC，得 \frac{DP}{GD}=\frac{AB}{AC}.$$

$$DP=\frac{AB}{AC}\cdot GD=\frac{425}{510}\times(510-d)=425-\frac{5}{6}d. \quad ①$$

同样，由 $$\triangle PEH\backsim\triangle ABC，得 \frac{PE}{EH}=\frac{AB}{BC}.$$

$$PE=\frac{AB}{BC}\cdot EH=\frac{425}{450}\times(450-d)=425-\frac{17}{18}d. \quad ②$$

因为 $d=DP+PE$，所以，由①＋②，得

$$d=850-\frac{16}{19}d,\quad \therefore\quad d=306.$$

10.〔解〕 根据题意，则有

$$N+(abc)=222(a+b+c). \quad (*)$$

由此可见，这个问题可以通过探求 222 的一个整数倍来解决。设 $K=a+b+c$，为了满足(*)式，则

$$222K>N(\because\ (abc)\neq 0),$$

且
$$222K<N+1000(\because\ (abc)\text{是三位数}).$$

那就是，$222K-N$ 的各位数字之和必须是 K。若这样认为，则 $222K-N$ 就是此问题的答案。

$$\because\quad (14)\times(222)<3194 \text{ 且 } (19)\times(222)>3194+1000,$$

$$\therefore\quad K=15,16,17 \text{ 和 } 18.$$

其中，仅 16 满足要求，即

$$(16)\times 222-3194=358 \text{ 且 } 3+5+8=16.$$

因此，(abc)是 358。

11. [解] 以 $y-1$ 代替 x，原多项式表示成为

$$1-(y-1)+(y-1)^2-(y-1)^3+\cdots+(y-1)^{16}-(y-1)^{17},$$

从而，可以写成下列形式

$$1+(1-y)+(1-y)^2+(1-y)^3+\cdots+(1-y)^{16}+(1-y)^{17}. \qquad (*)$$

在$(*)$式中，对于每一个$(1-y)^k$，$2\leqslant k\leqslant 17$，都有一个 y^2 项。根据二项式定理，可知 y^2 项的系数是C_k^2或 $\frac{k(k-1)}{2}$。因此，求 a_2 的值等价于计算和式：

$$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{17}^2.$$

我们可以利用下列推导的结果来计算上述的和式，即

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{(n+1)n(n-1)}{6},$$

或者，可用更一般的公式

$$\sum_{k=m}^{n}C_k^m=C_{n+1}^{m+1}$$

来计算。总之，所求的和等于 816。

12. [解] 首先，证明数集S至多含有 5 个元素。不然的话，数集S至少含有 6 个元素，那么S中，由不超过 4 个元素所组成的子集个数共有

$$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56.$$

上述这些子集的各自的和中，最大者是 54(因为 $15+14+13+12=54$)。因此，根据抽屉原则，至少有两个集合的和是相等的。若这两个集合不相交，但是它们有相同的和；若这两个集合相交，有公共元素。去掉公共元素后，与题设矛盾。

其次，我们试图构造这样一个含有 5 个元素的集合 S。它的元素选择得尽可能大，在S中包含 15，14 和 13，但是若 12 也在S中，则有 $12+15=13+14$ 与题设矛盾。因此，我们必须舍去 12。然后，11 是S的一个元素，但是，10 不属于 S，因为 $10+15=11+14$，且 9 也不属于 S，因为 $9+15=11+13$。我们必须安排 8 是S的第五个元素。确实，$S=\{8, 11, 13, 14, 15\}$满足此问题的条件，

$$8+11++13+14+15=61$$

即为所选择的解。

最后，显然集S的和的最大值是 61。假定对于选择的另一个集合S的和是比 61 更大，这个集合必须也包含 15，14，13。如果甚至把它们中最小的 13 略去，而包含 10，11 和 12。这时，和的最大值只可能达到 62，但是出现 $15+11=14+12$。为此，若要选取 15，14 和 13，必须除去 12，如前面所述。如果 11 被包含，那么所得的和是 61 和上述一样。如果不包含 11，那么包含 10 和 9。但这种选取不符合题意，因为 $15+9=14+10$。

由此可见，集S的和的最大值不能超过 61，从而 61 确实是一个能够达到的最大的和。

13. [解] 掷硬币所得结果序列可看作是一系列反[记为(反)]，正[记为(正)]的组合，其次，每一个"正反"[记为(正)(反)]，"反正"[记为(反)(正)]。因为在掷硬币十五次的结果序列中，"正反"或"反正"只涉及到括号和括号之间的关系，而与括号内的正的个数或者反的个数无关。

由此可得，满足我们所要求的每个这样的结果序列必有这种形式

(反)(正)(反)(正)(反)(正)(反)(正)，

其中有 3 个"正反"，4 个"反正"。 $(*)$

我们考虑$(*)$式的各个组合中，反，正的位置，以便保证每个序列将有 2 个"正正"，5 个"反反"的顺序。为了这个目的，假定在$(*)$式中最初每个组合只含有一个元素。然后，为满足所求问题的条件，放 2 个正在

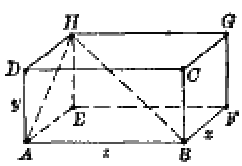
(正)里，放5个反在(反)里。为此，必须计算方法种数，达到解决问题目的。

根据 r 只相同颜色的球放到 n 个编号不同的盒子中去，在一个盒子中，我们愿意放多少就可以放多少只球，那么放球的方法的种数是 C^r_{n+r-1}。

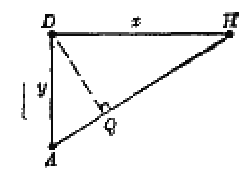
在本题的情况下，意味着将2个正放到4个(正)里，有 $C^2_{4+2-1}=10$(种)；将5个反放到4个(反)里，有 $C^5_{4+5-1}=56$(种)。所以
$$10\times56=560(\text{种})。$$

14.〔解〕 如图1，为了求 P 的体积，只须确定 x, y, z。记 P 的一条对角线和与它不相交的棱之间的最短距离分别是

$$d(BH, CD)=2\sqrt{5},\ d(BH, AE)=\frac{30}{\sqrt{13}},\ d(BH, AD)=\frac{15}{\sqrt{10}}. \quad ①$$



(图 1)



(图 2)

因为 BH 到 CD 的距离等于 CD 到平面 ABH 的距离，也就是，D 到矩形 $AEHD$ 的对角线 AH 的垂线长度。此垂线垂直于平面 ABH 和线段 CD。于是，在图2中，由 $\triangle HDQ\backsim\triangle AHD$，得

$$\frac{DQ}{DA}=\frac{DH}{AH},\quad DQ=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

同理可得，BH 分别与 AE，AD 之间的最短距离。

鉴于①式，得方程

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\sqrt{5},\quad \frac{yz}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{30}{\sqrt{13}},\quad \frac{zx}{\sqrt{z^2+x^2}}=\frac{15}{\sqrt{10}}. \quad ②$$

对②式中的每一个方程两边平方，然后分别取倒数并化简，得

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{20},\quad \frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{13}{900},\quad \frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{2}{45}. \quad ③$$

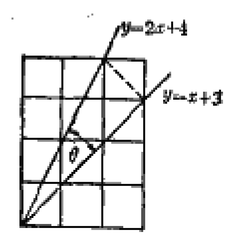
解方程组③，得

$$x=5,\ y=10,\ z=15.$$

因此，P 的体积是 $xyz=750$。

15.〔解法一〕 更一般地，若 $\triangle ABC$ 是以 C 为直角的直角三角形。若 $AB=2r$，过 A，B 的中线的夹角为 θ，则 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}r^2\operatorname{tg}\theta. \quad ①$$



(图1)

根据这个理由，本题有

$$r=\frac{60}{2}=30,\ 且\ \operatorname{tg}\theta=\frac{1}{3}\ (如图1)。$$

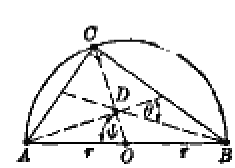
$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}r^2\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}\times30^2\times\frac{1}{3}=400.$$

下面对①式予以证明。

首先，注意

$$S_{\triangle ABC}=r^2\sin\phi. \quad ②$$

这里 $\phi=\angle AOC$，O 是 AB 的中点，D 是三角形的重心，且 $CO=r$。如图2所示。



(图2)

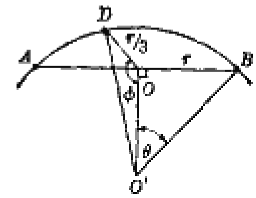
要证①式，只须证明 $\sin\phi=\frac{4}{3}\operatorname{tg}\theta$ 即可。也即只须证明

$$\cos\phi=-\left(\frac{4}{3}\right)\operatorname{tg}\theta. \quad ③$$

这里 $\phi=\psi+90°$。

如图 3，O' 是圆心，此圆过 D 和 B，且 $\angle DOC'=\phi$。

证明③式：对 $\triangle DOO'$ 应用余弦定理。($\angle OC'B=\theta$，$\angle ADB=180°-\theta$，且弓形 ADB 的圆心角是 2θ，$DO=\frac{r}{3}$)。



(图 3)

$$\because \quad DC'=BO'=r\csc\theta,\ OO'=r\operatorname{ctg}\theta,$$

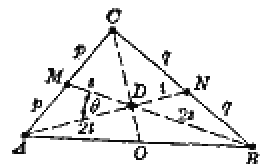
$$\therefore \quad \cos\phi=\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^2+(r\operatorname{ctg}\theta)^2-(r\csc\theta)^2}{2\left(\frac{r}{3}\right)(r\operatorname{ctg}\theta)}=-\frac{4}{3}\operatorname{tg}\theta。$$

从而①式得证。

[解法二]　如图 4，$\theta=\angle ADM$，$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{3}$，且 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$。

由 $S_{\triangle ABC}=6S_{\triangle ADM}$，得

$$S_{\triangle ABC}=6st\sin\theta=\frac{6}{\sqrt{10}}st。\qquad ①$$



(图 4)

$\because$　$\triangle ABC$ 是直角三角形，

$$\therefore \quad S_{\triangle ABC}=2pq。\qquad ②$$

而由勾股定理，得

$$4p^2+4q^2=AB^2=3600,$$
$$p^2+4q^2=9s^2,$$
$$4p^2+q^2=9t^2。$$

然后，由上述这些表达式，以及①和②，得

$$(S_{\triangle ABC})^2=\frac{18}{5}s^2t^2=\frac{18}{5}\times\frac{p^2+4q^2}{9}\cdot\frac{4p^2+q^2}{9}=\frac{2}{45}[(2p^2+2q^2)^2+9p^2q^2]$$
$$=\frac{2}{45}\left[\left(\frac{3600}{2}\right)^2+\frac{9}{4}(S_{\triangle ABC})^2\right]=144000+\frac{1}{10}(S_{\triangle ABC})^2。$$

从而，$\frac{9}{10}(S_{\triangle ABC})^2=144000$，$S_{\triangle ABC}=400$。

上海市中学生数学竞赛及中学生数学课外活动概况

本文将对上海市举办中学生数学竞赛的历史、做法等作一个简要的回顾，并扼要介绍上海市数学会中教委员会课外活动研究组开展活动的一些情况及看法。

一

1956 年，根据中国数学会的指示，上海市数学会在市教育局和科联的积极支持下，于当年和次年上半年举办了上海市第一届和第二届中学生数学竞赛。从这二次竞赛的经验来看，它对鼓舞青年学生积极向科学进军和提高中学数学教学质量都起了良好的推动作用。当时参加的对象是本市普通中学、业余中学及速成中学高中二、三年级的在校学生；竞赛方式采用初赛、复赛、决赛三级制。初赛由各校自行命题，选拔优胜者参加复赛；复赛和决赛由竞赛委员会举办。上海市数学会中教委员会对两次竞赛专门作了小结，并编辑出版了《上海市 1956～1957 年中学生数学竞赛习题汇编》一书。

接着，在 1958 年、1960 年、1962 年、1963 年又先后举办了上海市第三、四、五、六届中学生数学竞赛，为国家发掘了一大批数学人才。1966 年，竞赛工作中断。

1978 年才恢复举办了上海市第七届中学生数学竞赛，并让 50 名优胜者参加当年全国部分省市数学竞赛。在这次全国性的数学竞赛中，上海的学生取得了优异的成绩。

1978 年后，市数学会每年都举办一次市级的中学生数学竞赛。为了不影响高三的毕业复习，竞赛时间安排在 5 月份。竞赛一般分二试进行：第一试着重于基础知识和解题速度的考查；第二试着重于解题技巧和逻辑推理能力的考查。参加对象以高三学生为主，也有少量的高一、高二尖子学生。对优胜者颁发给证书和奖品。近年来，除定期举办市级高中学生数学竞赛外，还定期举办市级初中学生的数学竞赛。

后面汇编了未发表过的上海市 1981～1986 年的中学生数学竞赛试题及题解。

二

早在 1956 年，为提高中学数学教学质量，各校都成立了数学小组，有的还组织了校际数学小组，如延安中学、格致中学、南洋模范中学、五十一中学、上海中学、市西中学等六校高二学生就组织了校际数学小组。他们除钻研数学教材外，还自觉地开展专题报告、专题研究及小型数学竞赛等活动。这些课外活动的开展为数学竞赛取得优良成绩创造了条件。

1978 年和 1979 年，作为参加全国中学生数学竞赛的准备，在市数学会的组织下，对 50 名市数学竞赛优胜者都集中辅导约半个月，收到了一定的效果，也培养了一大批象李骏、欧阳峰、章柏海那样的拔尖学生。

我们注意到数学竞赛活动是经常举办的，培养人材也不是一朝一夕能完成的，而要细水

长流。对优秀学生的训练要有步骤、有目的的长期进行，也只有这样才能广种博收，效果显著。1980年市数学会中教委员会成立“中学生课外活动研究组”，同年，上海市青少年数学爱好者协会成立。课外活动研究组与市青少年数学爱好者协会在校、区数学小组的基础上，联合组织本市学有余力的中学生，分年级成立课外活动小组。学生来源由各区县推荐，再经过考试选拔。每年三、四月份，初一、高一招收新生。考试一般分二步：第一步与青少年数学爱好者协会吸收新会员相结合；第二步再经考试把优秀学生集中起来单独编成小班。每周学习半天(有时寒暑假也适当串插开展一些活动)，循序渐进，有计划地加以培养。小班每经一单元活动后，安排一次验收检查，了解教学情况，发现问题，以便及时弥补和指导。一定阶段后，再考试并对小班进行适当调整，这样有利于人材流动，不断把各方面的学科尖子输送进来。初一、高一都要经过二年的培养才告一段落。

活动内容是现行中学数学教学内容的加深、拓广和补充。为了与当前数学教学内容相配合，有利于学校的数学教学，活动内容坚持不超前，只是紧接在各年级数学教学进度后面，填补学生继续提高道路上的缺陷，特别是基础知识上的缺陷，使学生在认识上不断深化，求得熟练、灵巧，适应多变。例如，高一年级活动内容，几何学方面有《平面几何证题方法》、《平面几何三角解法》、《平面几何代数解法》、《几何不等量》、《几何极值》等；三角学方面有《三角恒等式的证明》、《三角综合题》、《三角极值》、《反三角函数与三角方程》等；代数学方面有《代数方程》、《解不等式》、《数与形》、《集合杂谈》等。高二年级活动内容，立体几何方面有《截面问题》、《异面直线的交角与距离》、《立体几何解题方法》、《立体几何极值》等；代数方面有《不等式证明》、《数列求和》、《数学归纳法》、《复数的综合应用》等；解析几何方面有《解析几何证题》、《二次曲线族》等。此外，还补充抽屉原则和有关数论的初步知识等。

课外活动主要在“填平补缺”、“讲练结合”的基础上，进一步培养学生分析问题和解决问题的能力，同时进行一定的从难、从严的训练。为进一步扩大学生的知识面，拓广学生的思路，注意书面表达的完整性，还邀请一些有经验的教师、专家、学者作些图论、函数方程、概率等专题报告或科普讲座。

为了配合参加美国中学生数学竞赛，市数学会课外活动研究组每年还专门为有关学校开办了训练班。在这个训练班中，除给学生补充我国中学数学教学中的薄弱内容(如概率、进位制等)外，就以选择题练习为主，适当分析，以迅速提高学生的解题能力和解题速度，适应美国中学生数学竞赛的需要。

几年来，学生通过上述课外活动，涌现出一大批象车晓东、王菁那样全面发展的拔尖学生。每年从市级辅导班出来的学生全部升入高等学校，不少学生进入了重点大学，在参加国内研究生考试中也名列前茅；与此同时，一支由中学教师和高校教师组成的市数学课外活动的辅导队伍在摸索中不断发展壮大；各中学、各区县和市的数学课外活动逐级衔接，分工协作，配套成龙，使工作制度化。

当然，目前上海市数学课外活动的要求、内容、方法与国际数学奥林匹克的水平还有相当差距；各中学、各区县的数学课外活动的开展还不平衡，这些还有待于我们更进一步探讨、实践和总结。

1981 年上海市中学生数学竞赛试题

第 一 试

1. (本题 10 分)已知 $f(x)=1+\log_x 5$, $g(x)=\log_{x^2}9+\log_{x^3}8$, 试比较 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值的大小。

2. (本题 10 分)在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为钝角, AB 边上的高为 h, 求证: $AB>2h$。

3. (本题 12 分)已知正四棱锥 $P—ABCD$ 的侧面与底面的夹角 α, 相邻两侧面的夹角 β, 求证: $\cos\beta=-\cos^2\alpha$。

4. (本题 12 分)设 $\sum\limits_{m=1}^{n}\left[\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\frac{2}{j}\sum\limits_{k=1}^{j}k\right)\right]=275$, 求正整数 n 的值。(注: $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的缩写记号)

5. (本题 12 分)设 n 为偶数, 试证:

$$\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}.$$

(本题 14 分)设抛物线的对称轴是 $2x+y-1=0$, 准线是 $x-2y-5=0$, 且与直线 $2y+3=0$ 相切, 求此抛物线方程。

7. (本题 15 分)已知 $x^3+x^2\sin\theta+x\sin 2\theta+\sin 3\theta\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, 且

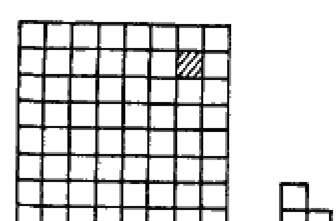
$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}>0, \text{求 } \theta \text{ 的取值范围。}$$

8. (本题 15 分)已知复数 z_1、z_2、z_3, $|z_1|=1$, $|z_2|=k$, $|z_3|=2-k$, $\arg z_1=\alpha$, $\arg z_2=\beta$, $\arg z_3=\gamma$, 且 $z_1+z_2+z_3=0$, 问 k 取何值时, $\sin^2(\beta-\gamma)$ 的值为最大?

第 二 试

1. (本题 14 分)设 n 是正整数, k 是不小于 2 的整数, 试证 n^k 可以表示成 n 个相继的奇数之和。

2. (本题 14 分)试证在 $2^n\times 2^n(n\in N)$ 个相等小方格组成的棋盘上任意挖去一个小方格后, 总可以由三个小方格构成的 L 形块(如图)恰好铺满(既不重叠, 也不越界)。



3. (本题 14 分)计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\frac{4^3-1}{4^3+1}\times\cdots\times\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$。

4. (本题 18 分)在方程组

$$\begin{cases} ax_1^4 + bx_1^3 = x_2^2, \\ ax_2^4 + bx_2^3 = x_3^2, \\ ax_3^4 + bx_3^3 = x_4^2, \\ ax_4^4 + bx_4^3 = x_1^2 \end{cases}$$

中，a、b 是实数，且 $a \neq 0$。求证：

(1) 当 $b^2+4a \geqslant 0$ 时，方程组至少有一组非零实数解；

(2) 当 $b^2+4a<0$ 时，方程组不存在非零实数解。

5．（本题 20 分）已知边长为 1 的正方体 $ABCD—A'B'C'D'$，AC' 是对角线，M、N 分别是 BB'，$B'C'$ 的中点，P 是线段 MN 的中点。求 DP 与 AC' 的距离。

6．（本题 20 分）设一圆和一条等轴双曲线交于四点 A_1、A_2、A_3、A_4，其中 A_1 和 A_2 是圆的直径的一对端点，试证：

(1) A_3 和 A_4 是双曲线直径的端点；

(2) 双曲线在 A_3 和 A_4 处的切线都垂直于 A_1A_2。

解　　答

第　一　试

1．〔分析〕 本题中的两个对数函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的底数不一，为此应该用换底公式把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 变成同底对数，这样就可应用对数函数的单调性来比较 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值的大小了。

〔解〕 利用换底公式可得：

$$\log_{x^2}9=\log_x 3,\quad \log_{x^3}8=\log_x 2,$$

$\therefore\ f(x)-g(x)=\log_x \dfrac{5x}{6}$.

由对数函数的单调性可知：

(1) 当 $\begin{cases} x>1 \\ \frac{5}{6}x<1 \end{cases}$，即 $1<x<\frac{6}{5}$ 时，$\log_x \frac{5x}{6}<0$，$\therefore$ 有 $f(x)<g(x)$。

(2) 当 $\begin{cases} x>1 \\ \frac{5}{6}x>1 \end{cases}$，即 $x>\frac{6}{5}$；或 $\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<\frac{5}{6}x<1 \end{cases}$，即 $0<x<1$ 时，

$$\log_x \frac{5x}{6}>0,\ \therefore\ 有\ f(x)>g(x).$$

(3) 当 $x=\frac{6}{5}$ 时，$\log_x \frac{5x}{6}=0$，$\therefore$ 有 $f(x)=g(x)$。

2．〔分析〕 本题从几何角度考虑，可应用几何不等量关系如：斜线长大于垂线长、两个三角形中比较边不等的定理、圆内任一点与圆心连线小于半径等来进行证明，为此需构造三角形或圆。

从代数角度考虑，可将 AB 表示成用 h 来表示的两线段之和，然后利用代数基本不等式来推出结论。

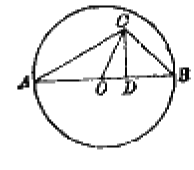
下面给出两种比较简单的证法：

〔证法一〕 以 AB 为直径作圆 O，则 C 点必在圆 O 内（如图所示）。$\therefore\ OC<AO=\frac{AB}{2}$。又过 C 作 $CD\perp AB$，则 $h=CD\leqslant OC$，$\therefore\ AB>2h$。

〔证法二〕 在图中，$AB=AD+BD=h(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)$ ①

$\because$ $\angle C$ 是钝角， $\therefore$ $\angle A+\angle B<90°$，

$\therefore$ $\text{ctg } B>\text{ctg}(90°-A)=\text{tg } A$. ②

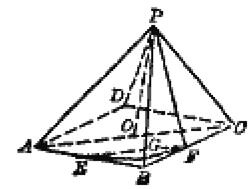


由①、②和代数基本不等式得 $AB>h(\text{ctg } A+\text{tg } A)\geqslant 2h\sqrt{\text{ctg } A\,\text{tg } A}=2h$。

3.［分析］ 只要根据二面角的定义，正确合理地作出角 α 和 β 就可得证。

［解］ 如图所示，O 为底面中心，F 为 BC 中点，则 $OF\perp BC$，$PF\perp BC$，

$\therefore$ $\angle PFO=\angle\alpha$。



在平面 PBC 内，过 F 作 $FG\perp PB$，在 $\triangle PAB$ 中过 G 作 $GE\perp PB$，则 $\angle EGF=\angle\beta$。

$\because$ $P\text{—}ABCD$ 是正四棱锥， $\therefore$ $\angle PBC=\angle PBA$，于是可推得：$\triangle GBE\cong\triangle GBF$， $\therefore$ $EG=FG$，$EB=FB$，E 为 AB 的中点。

设 $AB=2a$，$PO=h$。则 $\cos^2\alpha=\dfrac{a^2}{a^2+h^2}$，

又 $EF=\dfrac{AC}{2}=\sqrt{2}\,a$，$EG=FG=BF\sin\angle PBC=\dfrac{a\,\text{tg}\angle PBC}{\sqrt{1+\text{tg}^2\angle PBC}}$，

而 $\text{tg}\angle PBC=\dfrac{PF}{BF}=\dfrac{\sqrt{h^2+a^2}}{a}$， $\therefore$ $EG^2=\dfrac{a^2(a^2+h^2)}{h^2+2a^2}$。

在 $\triangle EGF$ 中由余弦定理得 $\cos\beta=\dfrac{2EG^2-EF^2}{2EG^2}=1-\dfrac{a^2}{EG^2}=-\dfrac{a^2}{a^2+h^2}=-\cos^2\alpha$。

4.［解］ 左端

$$=\sum_{m=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{j}(1+2+\cdots+j)\right]=\sum_{m=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}(j+1)\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{1}{2}m(m+1)+m\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{n}m^2+3\sum_{m=1}^{n}m\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{3}{2}n(n+1)\right]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+5)。$$

于是得方程 $\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+5)=275$。 (*)

即：$(n-10)(n^2+16n+165)=0$， $\therefore$ $n=10$。

［说明］ 由于本题是求正整数 n 的值， $\therefore$ 解方程(*)时，可将方程变形成 $n(n+1)(n+5)=1650=10\times11\times15$， $\therefore$ 直接可观察得 $n=10$。

5.［分析］ 求证式中出现数 $(n-m)!\,m!\,(m=1,2\cdots n-1)$ 和 2^{n-1}，往往可联想到应用组合数公式和性质，还可考虑应用组合总数公式来进行证明。

［证明］ 利用组合数公式 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$，所求证等式即变为证明：

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}。$$

由组合数性质得 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots$。 ①

又由组合总数公式得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$， ②

由①、②即得 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}$。

6.［分析］ 本题已知抛物线的对称轴和准线方程，所以可用定义来求出抛物线方程。

［解］ 设抛物线焦点 $F(u,v)$，它在对称轴上，$\therefore$ 得 $v=1-2u$。根据抛物线定义，所求抛物线方程为

$$(x-u)^2+(y-1+2u)^2=\frac{(x-2y-5)^2}{5}，$$

展开整理后为 $4x^2+4xy+y^2-10(u-1)x-10(3-2u)y+25u^2-20u-20=0$。 ①

$\because$ 直线 $2y+3=0$ 与抛物线相切，所以用 $y=-\dfrac{3}{2}$ 代入上式所得的关于 x 的一元二次方程

$$4x^2+(4-10u)x+25u^2-50u+\frac{109}{4}=0$$

有两个等根，

$$\therefore\ \triangle=(4-10u)^2-16\left(25u^2-50u+\frac{109}{4}\right)=0,$$

由此可解得 $u=\frac{7}{5}$ 或 $u=1$。

当 $u=\frac{7}{5}$ 时，则所求抛物线方程①为 $4x^2+4xy+y^2-4x-4y+1=0$，即 $(2x+y-1)^2=0$，它退化为二条重合的直线，与题意不符，应予舍去。

当 $u=1$ 时，所求抛物线方程①为 $4x^2+4xy+y^2-10y-15=0$。

7.［分析］ 要求 θ 的取值范围，只需找到 θ 的三角函数不等式即可。由已知的恒等式能找到 α、β、γ 与 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 之间关系，代入行列式不等式即可得关于 θ 角的三角函数不等式。

［解］ 由已知恒等式右端展开并比较同类项系数得：

$$\alpha+\beta+\gamma=-\sin\theta,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\sin 2\theta,\quad \alpha\beta\gamma=-\sin 3\theta。$$

又 $0<\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]$

$$=-\sin\theta(\sin^2\theta-3\sin 2\theta),$$

即 $\sin^2\theta(\sin\theta-6\cos\theta)<0$，

$\therefore$ $\sin\theta\neq 0$，$\theta\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，且 $\sin\theta-6\cos\theta<0$，

$\therefore$ $(2n-1)\pi+\operatorname{arc\,tg}6<\theta<2n\pi+\operatorname{arc\,tg}6$，且 $\theta\neq 2n\pi(n\in Z)$。

［说明］ (1) 本题中已知恒等式中的常数项 $\sin 3\theta$ 与所求结果无关，所以将 $\sin 3\theta$ 换成任意一个常数，不会影响结果。

(2) 本题中的 α、β、γ 未必都是实数。

8.［分析］ 要求得本题的解，应求出用 k 来表示 $\sin^2(\beta-\gamma)$ 的表示式，然后用求函数最大(小)值的方法来求出结果。求用 k 表示 $\sin^2(\beta-\gamma)$ 的表示式可用已知条件代入 $z_1+z_2+z_3=0$ 来得到。或用复数的向量表示利用解三角形方法求得。

［解法一］ 由条件知 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=k(\cos\beta+i\sin\beta)$，$z_3=(2-k)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$，代入 $z_2+z_3=-z_1$ 比较实部和虚部得：

$$k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=-\cos\alpha, \qquad ①$$

$$k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma=-\sin\alpha, \qquad ②$$

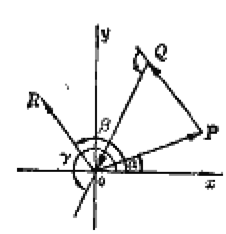
由①^2+②^{2}整理得：

$$\cos(\beta-\gamma)=1-\frac{3}{2k(2-k)}. \qquad ③$$

$\because$ $\sin^2(\beta-\gamma)=1-\cos^2(\beta-\gamma)$，　$\therefore$ $\sin^2(\beta-\gamma)$取最大即为$\cos^2(\beta-\gamma)$取最小。

由题意知 $k>0$，$2-k>0$，由③利用代数基本不等式得：

$$\cos(\beta-\gamma)=1-\frac{3}{2K(2-K)}\leqslant 1-\frac{3}{2\cdot\left(\frac{k+2-k}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2},$$



当 $k=2-k$，即 $k=1$ 时取到等号。

$\therefore$ $\cos^2(\beta-\gamma)\geqslant\frac{1}{4}$，可得 $\sin^2(\beta-\gamma)\leqslant\frac{3}{4}$，当 $k=1$ 时取等号，这时 $\sin^2(\beta-\gamma)$取最大值 $\frac{3}{4}$。

［解法二］ 设 $Z_1=\overrightarrow{OP}$，$Z_2=\overrightarrow{OR}$，　$\because$ $Z_1+Z_2=-Z_3$，由平行四边形法则得 $Z_3=\overrightarrow{QO}$(见图)。

从图中可见：

$$\cos(\beta-\gamma)=\cos(\gamma-\beta)=\cos(\pi-\angle PQO)$$

$$=-\cos\angle PQO=\frac{(2-k)^2+k^2-1}{2k(k-2)}=1-\frac{3}{2k(2-k)},$$

以下同解法一。

第 二 试

1.［分析］ 先从比较简单的情形开始，如取 $k=2$，就会发现所求证的结论是正确的，因为前 n 个奇数的和为 n^2。于是我们不难想到可采用数学归纳法来证。

［证明］ (1) 当 $k=2$ 时，由上分析知结论成立。

(2) 设 $k=l$ 时结论也成立，即成立 $n^l=(a+1)+(a+3)+\cdots+(a+2n-1)=na+n^2$。这里 a 为偶数。

当 $k=l+1$ 时，则 $n^{l+1}=n^l\cdot n=(na+n^2)n=n(na+n^2-n)+n^2$，如令 $b=na+n^2-n$，$\because$ a 和 $n(n-1)$ 都是偶数，$\therefore$ b 也为偶数，且有 $n^{l+1}=nb+n^2=(b+1)+(b+3)+\cdots+(b+2n-1)$。

由(1)和(2)得，当 k 是不小于 2 的整数时，n^k 可以表示成 n 个相继的奇数之和。

［说明］ 关于自然数的命题，常可用数学归纳法来证明，但并不是绝对的。本题就可用一种非数学归纳法的简便方法来证：

如令 $m=n^{k-1}-n$，则 $n^k=(m+1)+(m+3)+\cdots+(m+2n-1)$，

如能证 m 是偶数，即获证。当 $k=2$ 时，$m=0$；当 $k>2$ 时，

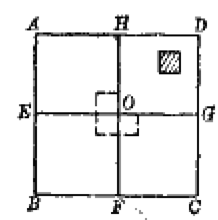
$$n^{k-1}-n=n(n-1)(n^{k-3}+n^{k-4}+\cdots+1),$$

又 $n(n-1)$ 是偶数，$n^{k-3}+n^{k-4}+\cdots+1$ 是自然数，$\therefore$ $n^{k-1}-n$ 为偶数。!

2.［证明］ (1) 当 $n=1$ 时，命题显然成立。

(2) 设 $n=k$（k 为自然数）时命题成立。

当 $n=k+1$ 时，把挖去一小方格的 $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ 的棋盘 $ABCD$ 四等分得四个 $2^k\times 2^k$ 棋盘 $AEOH$、$EBFO$、$OFCG$、$GDHO$，其中必有一个是挖去一个小方格的棋盘，设为 $GDHO$。现将一个 L 形块放在 O 处，使它在 $AEOH$、$EBFO$、$OFCG$ 中各占一格，则这四个 $2^K\times 2^K$ 的棋盘都成了挖去一个小方格的棋盘了，根据假设知，它们都恰好能被 L 形块铺满。



由(1)、(2)得，对一切自然数 n 命题成立。

3.［分析］ 解本题的关键是要把极限号后的分式积化简，化简的手段希望分子积和分母积中有相同因式可约分。为此可考虑将分子、分母分解因式后寻找分子积和分母积中有否公因式。我们有：

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}$$

$$=\frac{1\times 2}{n(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}=\frac{1\times 2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}.$$

［解］ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)=\dfrac{2}{3}$。

4.［分析］ 本题第一小题的条件 $b^2+4a\geqslant 0$，意味着一元二次方程 $ax^2+bx-1=0$ 有非零实数解。此方程与本题给出的方程组中的方程作一比较，就可发现，若令 $x_1=x_2=x_3=x_4=x\neq 0$，则方程组中的方程都变为 $x^2(ax^2+bx-1)=0$，于是就可证明方程组至少存在一组非零实数解。因为本题只要证明存在一组非零实数解，所以令 $x_1=x_2=x_3=x_4=x\neq 0$ 是完全合理的。至于当 $b^2+4a<0$ 时方程组不存在非零解是一个否命题可用反证法来证。

［证明］ (1) 令 $x_1=x_2=x_3=x_4=x\neq 0$，则方程组中每一方程都为 $x^2(ax^2+bx-1)=0$。

$$\because\ x\neq 0,\quad \therefore\ ax^2+bx-1=0. \qquad ①$$

由于 $a\neq 0$，$b^2+4a\geqslant 0$，$\therefore$ 方程①有非零实数解，由此得方程组至少有一组非零实数解。

(2) 若方程组有非零实数解，将各方程相加得：

$$a\sum_{i=1}^{4}x_i^4+b\sum_{i=1}^{4}x_i^3=\sum_{i=1}^{4}x_i^2,$$

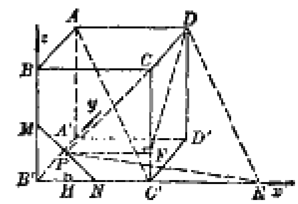
即
$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2(ax_i^2+bx_i-1)=0. \quad ②$$

∵ $b^2+4a<0\Longrightarrow 4a<0\Longrightarrow a<0$， ∴ $a^2x_i^2+bx_i-1<0$。$(i=1,2,3,4)$

又由假设 x_1,x_2,x_3,x_4 不全为零，

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{4}x_i^2(ax_i^2+bx_i-1)<0, \quad ③$$

②与③矛盾，∴ 假设不成立，即方程组不存在非零实数解。



5.［分析］ 求异面直线之间距离有多种方法，但常用方法化成点到面的距离，然后构成三棱锥，利用体积公式来求出所求距离。

［解］ 如图所示，在平面 $AB'C'D$ 中过 D 作 AC' 的平行线交 $B'C'$ 延长线于 E，则 $AC'\parallel\triangle DPE$ 所在的平面， ∴ DP 与 AC' 间距离即为 AC' 到 $\triangle DPE$ 的距离，亦为三棱锥 C'—DEP 的高，设为 d。

又在三棱锥中成立 $V_{C'-DEP}=V_{D-C'EP}$，即有：

$$\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle DEP}=\frac{1}{3}DC\cdot S_{\triangle C'EP}, \quad (*)$$

$$S_{\triangle C'EP}=\frac{1}{2}PH\cdot C'E=\frac{1}{8},\quad DE=\sqrt{3}.$$

$$PE=\sqrt{HE^2+PH^2}=\frac{5}{4}\sqrt{2}.$$

在 $Rt\triangle DFP$ 中，

$$DP=\sqrt{PF^2+DF^2}=\frac{\sqrt{34}}{4}.$$

由海伦公式得 $S_{\triangle DEP}=\frac{1}{8}\sqrt{86}$，

∴ 由(*)得，

$$d=\frac{DC\cdot S_{\triangle C'EP}}{S_{\triangle DEP}}=\frac{\sqrt{86}}{86}.$$

［说明］ 学过空间解析几何的读者，可用分析法来证明，那要简便得多。解法如下：

如图所示建立空间直角坐标系。则 $A(0,1,1)$，$C'(1,0,0)$，$D(1,1,1)$，$P\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}\right)$，设过 DP 且平行于 AC' 的平面 π 的方程为 $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$。又 ∵ D、$P\in\pi$， ∴ 有

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \quad ①$$

$$\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{4}\gamma+\delta=0, \quad ②$$

又 ∵ $AC'\parallel$ 平面 π， ∴ $\overrightarrow{AC'}\perp\pi$ 的法线向量， ∴ 有：

$$\alpha-\beta-\gamma=0. \quad ③$$

由①、②、③得 $\alpha=-\frac{1}{2}\delta$，$\beta=3\delta$，$\gamma=-\frac{7}{2}\delta$。

∴ π 的方程为 $x-6y+7z-2=0$，

由点到平面距离公式得 $d=\dfrac{|1\times1-6\times0+7\times0-2|}{\sqrt{1^2+(-6)^2+7^2}}=\dfrac{\sqrt{86}}{86}$。

6.［分析］ 要证 A_3、A_4 是双曲线的直径的端点，只须证明 A_3A_4 的中点即为双曲线的中心。第 **2** 小题只须用直线互相垂直的充要条件即斜率乘积为 -1 来证。

［证明］ (1) 设双曲线和圆方程分别为：

$$xy=a, \quad ①$$

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0, \quad ②$$

它们的交点分别为 $A_i(i=1,2,3,4)$，坐标为 $(x_i,y_i)\neq(0,0)$。

由①、②消去 y 得

$$x^4+2Dx^3+Fx^2+2aEx+a^2=0,$$

则 $x_i(i=1,2,3,4)$是它的根。 ③

由韦达定理可知，$x_1+x_2+x_3+x_4=-2D$。

∵ A_1、A_2 是圆②的直径的两端点， ∴ $x_1+x_2=-2D$。于是可得 $x_3+x_4=0$，

$$y_3+y_4=a\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=a\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}=0。$$

∴ A_3A_4 中点为(0, 0)。又双曲线 $xy=a$ 的中心在原点， ∴ A_3、A_4 是双曲线直径的端点。

(2) A_3 处双曲线的切线方程为 $x_3y+\frac{a}{x_3}x=2a$，其斜率 $k=-\frac{a}{x_3^2}$。又

$$k_{A_1A_2}=\frac{\frac{a}{x_2}-\frac{a}{x_1}}{x_2-x_1}=-\frac{a}{x_1x_2},$$

∴ $k\cdot k_{A_1A_2}=\frac{a^2}{x_1x_2x_3^2}$。但 $x_3=-x_4$，又由③，根据韦达定理知 $x_1x_2x_3x_4=a^2$，于是得 $k\cdot k_{A_1A_2}=-1$。这就证明了过 A_3 的双曲线切线垂直于 A_1A_2。

同样可证，过 A_4 的双曲线切线垂直于 A_1A_2。

1982年上海市中学生数学竞赛试题

第 一 试

1．选择题(本题20分，每小题5分)

(1) 如果 $c>1$, $a=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$, $b=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$, 那么

(A) $a>b$ (B) $a\geqslant b$ (C) $a=b$ (D) $a<b$ (E) $a\leqslant b$.

(2) 如果 $y=(\log_5 6)(\log_6 7)(\log_7 8)(\log_8 9)(\log_9 10)$, 那么

(A) $y\in(0,1)$ (B) $y=1$ (C) $y\in(1,2)$ (D) $y=2$ (E) $y\in(2,3)$.

(3) 单位圆中内接四边形的最短边的最大值：

(A) 不存在 (B) 1 (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) $\sqrt{2}$.

(4) 如果 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，且 $\sin B+\sin C<\sin B'+\sin C'$，那么

(A) $B-C>B'-C'$ (B) $|B-C|>|B'-C'|$ (C) $B-C<B'-C'$

(D) $|B-C|<|B'-C'|$ (E) $B-C=B'-C'$.

2．(本题12分)已知内接于圆的四边形的边长分别为 a、b、c、d,

(1) 求该四边形的面积 S; (2) 如果这个四边形又有内切圆，求证 $S=\sqrt{abcd}$.

3．(本题12分)棱锥 $V—ABC$ 的侧棱对于底面的倾角都相等，底面为直角三角形，它的两直角边 CA, CB 分别为 a 和 $\sqrt{3}a$，又棱锥的高为 b，M、N、P、Q 分别为 AC、CB 和 BV、VA 上的中点，求四边形 $MNPQ$ 的面积.

4．(本题12分)已知曲线 $C: y=x^2$，过定点 $P_1(a,0)(a>0)$ 作与 y 轴平行的直线且和 C 相交于点 M_1，然后过点 M_1 作 C 的切线和 x 轴相交于点 P_2，再过 P_2 作与 y 轴平行的直线且和 C 相交于点 M_2，又过 M_2 作 C 的切线和 x 轴相交于点 P_3，以下，用同样的方法直至无穷，求

$$S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots$$

的值.(其中 S_k 表示 $\triangle P_kM_kP_{k+1}$ 的面积)

5．(本题12分)空间有10个点，其中有4个点在同一平面上，除此之外，这10个点中不再有4个点共面，求以其中一点为顶点，过其它3个点的圆为底面的圆锥的个数.

6．(本题16分)已知直线 $y=kx+b(b\neq 0)$ 与二次曲线

$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

相交于 M、N 两点，试求直线 OM、ON 垂直的充要条件.

7．(本题16分)设 $z_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 是 $z^n-1=0$ 的 n 个根,

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 m 为小于 n 的正整数，求证：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) = a_0.$$

第 二 试

1．（本题 14 分）已知函数 $f(x)=x^2-2x+2$，$x\in[t,\ t+1]$ 的最小值是 $g(t)$，试写出函数 $S=g(t)$ 的解析表达式，并画出它的图象。

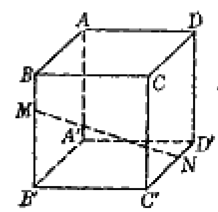
2．（本题 16 分）把 n^2 个互不相等的实数排成下表：

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_{1n}, \\ a_{21},\ a_{22},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_{nn}. \end{array}$$

取每行的最大数得 n 个数，其中最小的一个是 x；再取每列的最小数，又得 n 个数，其中最大的一个是 y，试比较 x^n 与 y^n 的大小。

3．（本题 16 分）如图，$ABCD—A'B'C'D'$ 是边长为 1 的正方体，

$$BM=\frac{1}{2}MB',\quad D'N=\frac{1}{2}NC'.$$

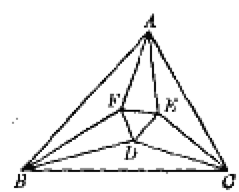


（1）指出 MN 的中垂面在已知正方体上截得的截面是一个什么样的图形，并加以说明。

（2）求出这截面在正方体的底面 $A'B'C'D'$ 上的射影的面积。

4．（本题 18 分）试证 $n(n\geqslant 2)$ 个互不相等的正整数的倒数平方和不能是整数。

5．（本题 18 分）从二次曲线 C 外一点 L 引 C 的两条切线，其切点的联线为直线 l，再从 C 外另外两点 M、N 同样引 C 的切线，其切点的联线分别为直线 m 和 n，又 L，M，N 三点共线，试证 l，m，n 三线共点。



6．（本题 18 分）如图，AE 和 AF，BF 和 BD，CD 和 CE 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的三等分线，求证 $\triangle DEF$ 是等边三角形。

解 答

第 一 试

1．(1)．［解］(D) ∵ $\sqrt{c+1}+\sqrt{c}>\sqrt{c}+\sqrt{c-1}>0$，

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}<\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}},\ \sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1},$$

即 $$a<b.$$

(2)．［解］(C) 利用换底公式，得

$$y=\frac{\lg 6}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 9}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 10}{\lg 9}=\frac{\lg 10}{\lg 5}=\frac{1}{1-\lg 2}\approx 1.4,$$

$$\therefore\ y\in(1,2).$$

(3)．［解］(E) 圆内接四边形最短边所对劣弧含的弧度数不大于 $\frac{\pi}{2}$。因为半径为 1，所以最短边的

最大值为 $2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$。

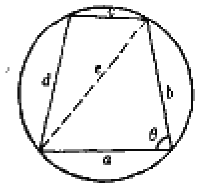
(4). [解](B) ∵ $\sin B+\sin C<\sin B'+\sin C'$,

$$\therefore\quad 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}<2\sin\frac{B'+C'}{2}\cos\frac{B'-C'}{2}.$$

又因 $$\angle A=\angle A',$$

故而 $$B+C=B'+C',\quad \sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{B'+C'}{2}>0,$$

$$\cos\frac{B-C}{2}<\cos\frac{B'-C'}{2}.$$



这里 $$0\leqslant\left|\frac{B-C}{2}\right|<\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\left|\frac{B'-C'}{2}\right|<\frac{\pi}{2},$$

因此 $$\left|\frac{B-C}{2}\right|>\left|\frac{B'-C'}{2}\right|,\quad |B-C|>|B'-C'|.$$

2. [解] (1) 如图,设 a、b 边所夹内角为 θ,则其对角为 $\pi-\theta$。连对角线 e,则

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta. \quad ①$$

又 $$e^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta, \quad ②$$

$$e^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta. \quad ③$$

②－③ $$a^2+b^2-c^2-d^2-2(ab+cd)\cos\theta=0,$$

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)=\frac{1}{2}(ab+cd)\cos\theta, \quad ④$$

①²＋④², $$S^2+\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=\frac{1}{4}(ab+cd)^2,$$

所以 $$S=\frac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}.$$

记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$,上式可写成

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

(2) 如果这个四边形又有内切圆,那么

$$a+c=b+d,$$

代入上式,即得 $S=\sqrt{abcd}$。

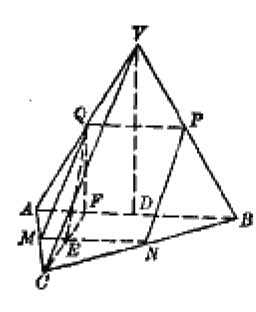
3. [解] 由于侧棱和底面倾角都相等,所以侧棱在底面上的射影都相等,棱锥高的垂足是△ABC 的外心,又因△ABC是直角三角形,所以垂足D为斜边AB的中点. 由于$MN\mathrel{\perp\!\!\!\!=}\frac{1}{2}AB\mathrel{\perp\!\!\!\!=}QP$,所以四边形 $MNPQ$ 为平行四边形。在底面 ABC 内,引 $CF\perp AB$,由于 $AC:BC=a:\sqrt{3}a$,故$\angle ABC=30°$,从而 $\angle ACF=30°$,$AF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}AB$,因此$F$是 AD 中点。连 QF,则 $QF\parallel VD$,由于 $VD\perp$△ABC,所以 $QF\perp$△ABC,由于 $MN\parallel AB$,所以 $MN\perp CF$,设 CF 交 MN 于 E,连 QE。根据三垂线定理,$MN\perp QE$。

$$QF=\frac{1}{2}VD=\frac{b}{2},$$

$$EF=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

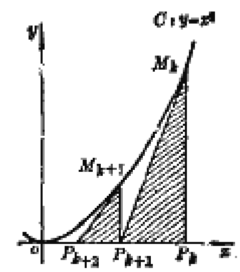
$$QE=\sqrt{QF^2+EF^2}=\frac{1}{4}\sqrt{3a^2+4b^2},$$

$$MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2a=a,$$



因此 $$S_{MNPQ}=MN\cdot QE=\frac{1}{4}a\sqrt{3a^2+4b^2}.$$

4.［解］ 如图，设点 P_k 的坐标为 $(x_k, 0)$，那么点 M_k 的坐标为 (x_k, x_k^2)。



$$y' = 2x,$$

曲线 C 在点 M_k 处的切线方程为

$$y - x_k^2 = 2x_k(x - x_k),$$

以 $y=0$ 代入，得此切线与 x 轴的交点横坐标 $x = \frac{1}{2}x_k$，即

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k.$$

所以

$$S_K = \frac{1}{2}|P_{k+1}P_k|\cdot|P_kM_k| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x_k\cdot x_k^2 = \frac{1}{4}x_k^3,$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{4}x_{k+1}^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x_k\right)^3 = \frac{1}{8}S_k.$$

$$S_1 = \frac{1}{4}a^3, \quad \frac{S_{k+1}}{S_k} = \frac{1}{8} = q < 1,$$

$$\therefore \quad S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots = \frac{1}{4}a^3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}a^3.$$

5.［解法一］ 由题设可知这 10 个点中无三个点共线，因此过其中任意三点可确定一个圆。

如果共面的四点恰巧共圆，可作圆锥

$$1\cdot C_6^1 + C_4^2\cdot C_6^1\cdot C_5^1 + C_4^1\cdot C_6^2\cdot C_7^1 + C_6^3\cdot C_7^1 = 818(\text{个}).$$

如果共面的四点不共圆，可作圆锥

$$C_4^3\cdot C_6^1 + C_4^2\cdot C_6^1\cdot C_7^1 + C_4^1\cdot C_6^2\cdot C_7^1 + C_6^3\cdot C_7^1 = 836(\text{个}).$$

［解法二］ 如果无四点共面，可作圆锥

$$C_{10}^1\cdot C_9^3 = 840(\text{个}).$$

如果共面四点恰共圆，可作圆锥

$$840 - (C_4^3\cdot C_1^1 - 1\cdot C_6^1) = 818(\text{个}).$$

如果共面四点不共圆，可作圆锥

$$840 - C_4^3\cdot C_1^1 = 836(\text{个}).$$

6.［解法一］ 设 M、N 的坐标为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)。

$$\begin{cases} y = kx + b, & ① \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. & ② \end{cases}$$

①代入②，得

$$Ax^2 + (2Bx + 2E)(kx + b) + C(kx + b)^2 + 2Dx + F = 0,$$

$$(A + 2Bk + Ck^2)x^2 + (2Bb + 2Ek + 2Ckb + 2D)x + 2Eb + Cb^2 + F = 0.$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2Bb + 2Ek + 2Ckb + 2D}{A + 2Bk + Ck^2}, \quad ③$$

$$x_1\cdot x_2 = \frac{2Eb + Cb^2 + F}{A + 2Bk + Ck^2}. \quad ④$$

又

$$y_1 = kx_1 + b,\ y_2 = kx_2 + b,$$

$$y_1\cdot y_2 = k^2x_1x_2 + (x_1 + x_2)kb + b^2. \quad ⑤$$

$$OM \perp ON \Longleftrightarrow \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = -1 \Longleftrightarrow y_1y_2 + x_1x_2 = 0 \Longleftrightarrow (k^2+1)x_1x_2 + (x_1 + x_2)kb + b^2 = 0(\text{利用⑤式})$$

$$\Longleftrightarrow Ab^2 - 2Dkb + Fk^2 + Cb^2 + 2Eb + F = 0(\text{利用③、④式}).$$

［解法二］ M、N 坐标满足

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, & ① \\ y = kx + b. & ② \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2+(2Dx+2Ey)\dfrac{y-kx}{b}+F\dfrac{(y-kx)^2}{b^2}=0, & ③ \\ \dfrac{y-kx}{b}=1. & ④ \end{cases}$$

③式可化为

$$\left(A-\frac{2Dk}{b}+\frac{Fk^2}{b^2}\right)x^2+\left(2B+\frac{2D}{b}-\frac{2Ek}{b}-\frac{2Fk}{b^2}\right)xy+\left(C+\frac{2E}{b}+\frac{F}{b^2}\right)y^2=0, \quad ⑤$$

显然⑤式表示两直线 OM、ON 的方程。

又设这两直线方程为

$$(l_1x+m_1y)(l_2x+m_2y)=0,$$

即

$$l_1l_2x^2+(l_1m_2+l_2m_1)xy+m_1m_2y^2=0. \quad ⑥$$

此两直线垂直的充要条件为

$$l_1l_2+m_1m_2=0.$$

比较⑤、⑥，得 OM 与 ON 垂直的充要条件为

$$A-\frac{2Dk}{b}+\frac{Fk^2}{b^2}+C+\frac{2E}{b}+\frac{F}{b^2}=0,$$

即

$$Ab^2-2Dkb+Fk^2+Cb^2+2Eb+F=0.$$

7.［证明］ $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}=z_1^k$,

$k=0,1,2,\cdots,n-1$.

$$f(z_0)=a_m+a_{m-1}+\cdots+a_l+\cdots+a_1+a_0,$$

$$f(z_1)=a_mz_1^m+a_{m-1}z_1^{m-1}+\cdots+a_lz_1^l+\cdots+a_1z_1+a_0,$$

$$f(z_2)=a_mz_1^{2m}+a_{m-1}z_1^{2(m-1)}+\cdots+a_lz_1^{2l}+\cdots+a_1z_1^2+a_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(z_{n-1})=a_mz_1^{(n-1)m}+a_{m-1}z_1^{(n-1)(m-1)}+\cdots+a_lz_1^{(n-1)l}+\cdots+a_1z_1^{n-1}+a_0.$$

当 $l=1,2,\cdots,m-1,m$ 时，由于 $l<n$，可知 $z_1^l\neq1$，于是

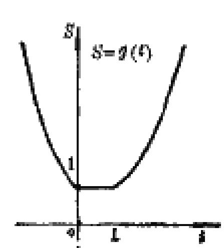
$$\sum_{k=0}^{n-1}z_1^{lk}=\frac{1-(z_1^l)^n}{1-z_1^l}=\frac{1-(z_1^n)^l}{1-z_1^l}=0,$$

因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)=a_0.$$

第 二 试

1.［解］ $f(x)=(x-1)^2+1$, $x\in[t,t+1]$.



当 $t\leqslant1\leqslant t+1$，即 $0\leqslant t\leqslant1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)=f(1)=1$.

当 $1>t+1$，即 $t<0$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)=f(t+1)=t^2+1$.

当 $1<t$，即 $t>1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)=f(t)=(t-1)^2+1$.

$s=g$ 的图象如右图所示。

2.［解］ 设 $x=a_{ij}$, $y=a_{pq}$, 则

$$a_{ij}\geqslant a_{iq}\geqslant a_{pq},$$

所以 $x\geqslant y$.

(1) 当 n 是奇数时，$x^n\geqslant y^n$,

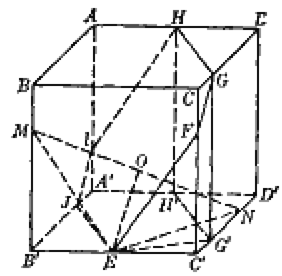
(2) 当 n 是偶数时，

i) 如果 $x\geqslant y\geqslant0$，则 $x^n\geqslant y^n$;

ii) 如果 $0\geqslant x\geqslant y$，则 $x^n\leqslant y^n$;

iii) 如果 $x\geqslant0\geqslant y$，则当 $x\geqslant-y$ 时，$x^n\geqslant y^n$；当 $x\leqslant-y$ 时，$x^n\leqslant y^n$.

3.［解］ (1) 记 MN 的中点为 O，MN 的中垂面交 $B'C'$ 于 E，设 $B'E=x$，由于 $EM=EN$，所以 $x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=(1-x)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$，$x=\frac{1}{2}$，即 $B'E=\frac{1}{2}$。



分别记 MN 的中垂面与 CC'、CD、DA 的交点为 F、G、H，用同样方法可求得 $CF=\frac{1}{4}$，$CG=\frac{1}{4}$，$AH=\frac{1}{2}$。

根据"两个平行平面被第三个平面所截，截得的交线互相平行"，可分别求得 MN 中垂面与 AA'、$A'B'$ 的交点 I、J，且 $A'I=\frac{1}{4}$，$A'J=\frac{1}{4}$。

综上可知，MN 的中垂面在已知正方体上截得的截面是一个六边形 $EFGHIJ$，它的三双对边分别平行而且相等。

(2) 设六边形 $EFGHIJ$ 在正方形底面 $A'B'C'D'$ 上的射影为 $EC'G'H'A'J$，

$$S_{\triangle G'D'H'}=S_{\triangle JB'E}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16},$$

所以

$$S_{EC'G'H'A'J}=1-2\times\frac{3}{16}=\frac{5}{8}.$$

4.［证明］ 将此 n 个互不相等的正整数由小到大排列，记为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，并记

$$F=\left(\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2.$$

当 $a_1>1$ 时，

$$0<F=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1,$$

∴ F 不是整数。

当 $a_1=1$ 时，仿前可得 $0<F-1=\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<1$，

即 $1<F<2$，∴ F 也不是整数。

5.［证明］ 设二次曲线 C 的方程为

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

L、M、N 三点的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)。

由于 L、M、N 三点共线，所以

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (*)$$

由点 L 引曲线 C 的两条切线，其切点弦 l 的方程为

$$ax_1x+b\cdot\frac{x_1y+y_1x}{2}+cy_1y+d\frac{x+x_1}{2}+e\frac{y+y_1}{2}+f=0. \qquad ①$$

整理得 $(2ax_1+by_1+d)x+(2cy_1+bx_1+e)y+(dx_1+ey_1+2f)=0.$

同样方法可求得切点弦 m 和 n 的方程分别为

$$(2ax_2+by_2+d)x+(2cy_2+bx_2+e)y+(dx_2+ey_2+2f)=0, \qquad ②$$

$$(2ax_3+by_3+d)x+(2cy_3+bx_3+e)y+(dx_3+ey_3+2f)=0. \qquad ③$$

欲证 l、m、n 三线共点，只要证方程①、②、③的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2ax_1+by_1+d & 2cy_1+bx_1+e & dx_1+ey_1+2f \\ 2ax_2+by_2+d & 2cy_2+bx_2+e & dx_2+ey_2+2f \\ 2ax_3+by_3+d & 2cy_3+bx_3+e & dx_3+ey_3+2f \end{vmatrix}=0.$$

事实上，上式左边可分拆成 $3\times3\times3=27$ 个行列式，利用行列式性质及(*)式，可知其中每一个都为零，因此结论得证。

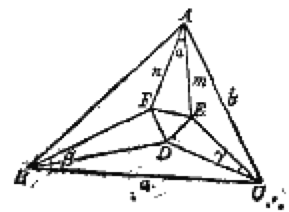
[说明] 本题结论中包括 l、m、n 平行(即 l、m、n 共点于无穷远处)的情形。

6. [证明] 如图，记 $A=3\alpha$，$B=3\beta$，$C=3\gamma$，$AE=m$，$AF=n$，$\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c。下面计算 $\angle AFE$ 和 $\angle BFD$。

由于 $3\alpha+3\beta+3\gamma=180°$，

所以 $\alpha+\beta+\gamma=60°$，$\alpha+\beta=60°-\gamma$。在 $\triangle AFB$ 内运用正弦定理

$$\frac{n}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad n=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{c\sin\beta}{\sin(60°-\gamma)}.$$



类似可得

$$m=\frac{b\sin\gamma}{\sin(60°-\beta)}.$$

在 $\triangle ABC$ 中运用正弦定理，

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin3\beta}{\sin3\gamma}.$$

从而

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin3\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin(60°-\gamma)}{\sin3\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin(60°-\beta)}.$$

利用恒等式

$$\sin3\beta=4\sin\beta\cdot\sin(60°+\beta)\cdot\sin(60°-\beta),$$

得

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin(60°+\beta)}{\sin(60°+\gamma)}.$$

由于 $\alpha+\beta+\gamma=60°$，所以存在以 $60°+\beta$、$60°+\gamma$ 和 α 为内角的三角形，而 α 角的两边之比为

$$\frac{\sin(60°+\beta)}{\sin(60°+\gamma)}=\frac{m}{n},$$

因此 $\triangle EAF$ 与此三角形相似，从而

$$\angle AFE=60°+\beta,\quad \angle AEF=60°+\gamma.$$

同样方法可证 $\angle BFD=60°+\alpha$，而 $\angle AFB=180°-\alpha-\beta$，

因此 $\angle EFA+\angle AFB+\angle BFD=(60°+\beta)+(180°-\alpha-\beta)+(60°+\alpha)=300°$，所以 $\angle DFE=60°$。

类似可证 $\triangle DEF$ 的另两个内角也为 $60°$，因此 $\triangle DEF$ 是等边三角形。

[说明] 本题是 F·莫雷(Morley)在 1899 年发现的，故又称莫雷定理。

1983 年上海市中学生数学竞赛试题

第 一 试

1．填充题(本题 40 分，每小题 5 分)

(1) $\dfrac{1+\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}15^\circ}=$ ______.

(2) $\left|\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{5}+\sqrt{2}i)(\sqrt{5}+\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{5}i)}\right|=$ ______.

(3) 1 到 1000 中所有被 3 除余 2，并且被 7 除余 4 的正整数之和为 ______.

(4) 一个椭圆内切于一个长为 m，宽为 n 的矩形，这个椭圆的内接矩形的周长的最大值是 ______.

(5) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$ ______.

(6) 如果 1、x、y 三个正数，既依次是一个等差数列的第 l 项、第 m 项、第 n 项，又依次是一个等比数列的第 l 项、第 m 项、第 n 项，那么 x, y 应满足的关系式是 ______.

(7) 在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中，任意取出一个子集，计算它的元素之和，则所有各个子集元素之和的总和是 ______.

(8) 点 P 在单位立方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱 CD 上滑动，过 P、A、C_1 三点作截面，则截面面积的最小值是 ______.

2．选择题：(本题 35 分，每小题答对 5 分，不答 1 分，答错 0 分)

(1) 如果命题"坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的点都在曲线 C 上．"是不正确的，那末下列命题中正确的一个是

(A) 曲线 C 上的点的坐标都满足方程 $F(x, y)=0$

(B) 坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的点都不在曲线 C 上

(C) 曲线 C 上的点的坐标不都满足方程 $F(x, y)=0$

(D) 坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的点有些在 C 上，有些不在 C 上

(E) 一定有不在曲线 C 上的点，其坐标满足方程 $F(x, y)=0$.

(2) 四名甲队队员，三名乙队队员站成一排，任何二名乙队队员不靠在一起，不同的站法有

(A) $4!\times 3!$ (B) $P_5^3\times 4!$ (C) $(4!)^2$ (D) $P_4^3\times 4!$ (E) 以上都不是.

(3) 已知 $x, y\in N$, $x>y$, $x^3+19y=y^3+19x$, $a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)$,

则

(A) $a\in(-3, -2)$ (B) $a\in[-2, -1]$

(C) $a\in(-1, 1)$ (D) $a\in[1, 2]$ (E) $a\in(2, 3)$.

(4) $\operatorname{arc\,tg}(-\operatorname{ctg}45)$的值是

(A) $-\frac{\pi}{4}$ (B) -45 (C) $45-\frac{29}{2}\pi$ (D) $\frac{29}{2}\pi-45$ (E) 以上都不是。

(5) 当$k\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$时，方程$\sqrt{|1-x|}=kx$的解的个数是

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4。

(6) 三个正数a、b、c满足条件：

(1) $a<b<c<30$；(2) 以某一个正整数为底，$a(2b-a)$与$c^2+60b-11a$的对数分别为9与11，则$a+c-2b$的值是

(A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) -2 (E) -4。

(7) 已知AD, BE, CF为$\triangle ABC$的三条高(D, E, F为垂足)，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$。则$\frac{DE}{DF}$的值是

(A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

第 二 试

1. (本题25分) 已知$\triangle ABC$的三内角的正切$\operatorname{tg}A$, $\operatorname{tg}B$, $\operatorname{tg}C$满足

(1) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=-\frac{1}{6}$；(2) $\operatorname{tg}^3A+\operatorname{tg}^3B+\operatorname{tg}^3C=-\frac{181}{216}$。

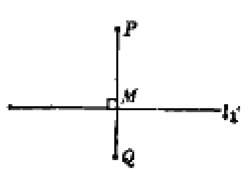
求A, B, C。

2. (本题25分) 已知点$P_0(x_0,\ y_0)$和直线l的方程$ax+by=0(a\neq0)$。令Q_1为P_0关于x轴的λ对称点，过Q_1作直线平行于l，交x轴于R_1；令P_1为Q_1关于R_1的μ对称点，同样由P_1可作Q_2, P_2，然后作Q_3, P_3，…等等。如果点$P_n(x_n,\ y_n)$，问

(1) 在什么条件下，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛？

(2) 它们的极限值各是什么？

注：设l_1为一直线，$PQ\perp l_1$，M为垂足(如图1)，如果$\lambda\cdot PM=MQ(\lambda>0)$，则称$Q$为$P$关于$l_1$的$\lambda$对称点。设$P$, Q, R共线(如图2)，如果$\mu\cdot PR=RQ(\mu>0)$，则称Q为P关于R的μ对称点。例如：当$\lambda=1$时，Q与P就关于l_1轴对称。当P在l_1上时，对于任何λ，P关于l_1的λ对称点就是P。



(图 1)



(图 2)

当$\mu=1$时，Q与P就关于R中心对称。

当$P=R$时，对于任何μ，P关于R的μ对称点就是P。

3. (本题25分) 设$y=\sin x$，问是否存在$(n+1)$个实系数的多项式$P_0(x)$、$P_1(x)$、…、$P_n(x)$，其中n为任意正整数，$P_0(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m(a_0\neq0)$，使$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_n(x)\equiv0$。

解　答

第 一 试

1. (1) [解] $\frac{1+\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}15^\circ}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}15^\circ}=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$。

(2) [解] ∵ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，及 $|a\pm bi|=|b\pm ai|=\sqrt{a^2+b^2}$，

∴ $|\sqrt{3}+\sqrt{2}i|=|\sqrt{2}-\sqrt{3}i|$，$|\sqrt{5}+\sqrt{2}i|=|\sqrt{2}-\sqrt{5}i|$，

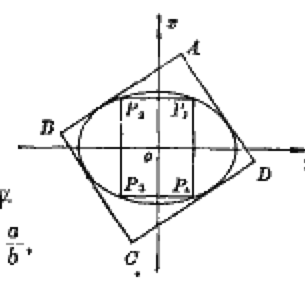
∴ 原式 $=\frac{|\sqrt{3}+\sqrt{2}i|\cdot|\sqrt{5}+\sqrt{2}i|\cdot|\sqrt{5}+\sqrt{3}i|^2}{|\sqrt{2}-\sqrt{3}i|\cdot|\sqrt{2}-\sqrt{5}i|}=|\sqrt{5}+\sqrt{3}i|^2=8$。

(3) [解] 从1到1000中，除3余2，且除7余4的数构成以11为首项，21为公差的等差数列，即：

$$11,\ 11+21,\ 11+2\times21,\ \cdots,\ 11+47\times21=998。$$

∴ 所求的和 $S=\frac{48\cdot(11+998)}{2}=24216$。

(4) [解] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，而 $ABCD$ 为它的外切矩形。



因椭圆的互相垂直的切线交点轨迹是以 O 为中心，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆，故 $|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=\sqrt{a^2+b^2}$，从而 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线交点，$2\sqrt{a^2+b^2}=AC=\sqrt{m^2+n^2}$。

又设 $P_1P_2P_3P_4$ 为椭圆的内接矩形，如右上图，则 P_1P_2，P_1P_4 分别平行 x 轴、y 轴，设 P_1 的坐标为 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，$\theta$ 为锐角，并记 $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$，

则 $P_1P_2P_3P_4$ 的周长 $=4(a\cos\theta+b\sin\theta)=4\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\leqslant4\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{m^2+n^2}$。

∴ $P_1P_2P_3P_4$ 周长的最大值为 $2\sqrt{m^2+n^2}$　$\left(此处\ \theta=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)$。

(5) [解] 设 $x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$，则 x 为实数，且

$$x^3=(10+6\sqrt{3})+(10-6\sqrt{3})+3\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(10-6\sqrt{3})}\cdot x=20-6x。$$

即 $x^3+6x-20=0$，　$(x-2)(x^2+2x+10)=0$。

取实根，得 $x=2$。

(6) [解] i) 设该等差数列的公差为 d，且 $d\neq0$，则

$$\begin{cases}x-1=(m-l)d,\\ y-1=(n-l)d,\end{cases}\quad ∴\quad \frac{x-1}{y-1}=\frac{m-l}{n-l}。$$

又设该等比数列的公比为 q，此时 $q\neq1$，且有

$$\begin{cases}\frac{x}{1}=q^{m-l},\\ \frac{y}{1}=q^{n-l},\end{cases}\quad ∴\quad \frac{\lg x}{\lg y}=\frac{m-l}{n-l}。$$

于是 $\frac{\lg x}{\lg y}=\frac{x-1}{y-1}$，　即 $x^{y-1}=y^{x-1}$。

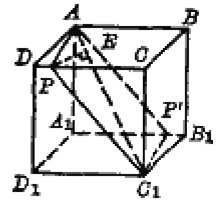
ii) 若 $d=0$，则 $x=y=1$，且 $q=1$。此时也满足 $x^{y-1}=y^{x-1}$。

∴ 无论何种情况，x，y 均满足 $x^{y-1}=y^{x-1}$。

(7) [解] 设 A 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集，且含有元素 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，则对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中不等于 k 的每

个元素 i 均有 $i\in A$ 或 $i\notin A$ 两种可能，故$\{1,2,\cdots,n\}$中含 k 的子集有 2^{n-1} 个，所以各个子集元素之和的总和为 $2^{n-1}(1+2+\cdots+n)=2^{n-2}\cdot n(n+1)$。

(8) ［解］ 如图，因为截面 $PC_1P'A$ 为平行四边形，它的对角线 AC_1 为定值$\sqrt{3}$，面积为 $2S_{\triangle APC_1}$，要截面积最小，即要使 $\triangle APC_1$ 的高 PE 最短，此时 PE 是异面直线 AC_1 与 CD 的公垂线。易得公垂线长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。



$\therefore$ 截面 $PC_1P'A$ 面积的最小值为 $2\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$(平方单位)。

2．(1) ［解］(E) 由题设知坐标满足 $F(x,y)=0$ 上的点或者全部不在曲线 C 上，或者有一部分在 C 上，还有一部分不在 C 上，因而(A)、(B)、(C)、(D)均可否定。

(2) ［解］(B) 本题分两步解决，先排 4 名甲队员，有 P_4^4 种排法，然后在 4 名甲队队员的间隔及两端这五个位置中，选 3 个位置排 3 名乙队队员，有 P_5^3 种排法。由乘法原理知不同站法有 $P_5^3\cdot 4!$ 种。

(3) ［解］(A) $\because$ $x^3-y^3=19(x-y)$，且 $x>y$，$x,y\in N$，

$\therefore$ $x^2+x<x^2+xy+y^2=19<3x^2$，由此算得 $x=3$，进而 $y=2$，

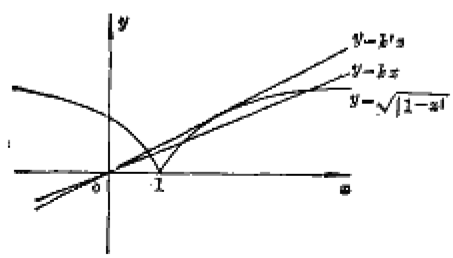
$\therefore$ $-3<a=\log_{\frac{1}{2}}(3+2)=\log_{\frac{1}{2}}5<-2$。

(4) ［解］(C) 选择适当整数 k 使得：

$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}(-\operatorname{ctg}45)=\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+45-k\pi\right)\right]=\frac{\pi}{2}+45-k\pi<\frac{\pi}{2}$，

解得 $\frac{45}{\pi}<k<\frac{45+\pi}{\pi}$， $\therefore$ $k=15$。

故 $\operatorname{arc\,tg}(-\operatorname{ctg}45)=\frac{\pi}{2}+45-15\pi=45-\frac{29}{2}\pi$。



(5) ［解］(D) 作出 $y=\sqrt{|1-x|}$ 的图象(如图)，设 $y=k'x$ $(k'>0)$ 与 $y=\sqrt{x-1}$ $(x>1)$ 的图象相切，则 $k'^2x^2=x-1$ 应有重根，即 $\Delta=1-4k'^2=0$， $\therefore$ $k'=\frac{1}{2}$。现 $0<k<\frac{1}{2}$，所以 $y=kx$ 与 $y=\sqrt{x-1}$ $(x>1)$ 相交，另一方面 $y=kx$ 与 $y=\sqrt{1-x}$ $(x<1)$ 显然有一个公共点，所以方程$\sqrt{|1-x|}=kx$ 的解的个数是 3 个。

［说明］ 本题也可用特殊值法，即取 k 在$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$内的一个特殊值，然后通过解方程来判定方程根的个数。

(6) ［解］(E) 设 $\log_x a(2b-a)=9$，即 $a(2b-a)=x^9$，这里 $x\in N$，$x\geqslant 2$。

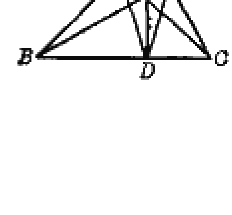
$\because$ $0<a\leqslant 27$，$1<b\leqslant 28$。 $\therefore$ $0<2b-a\leqslant 2\times 28-1=55$，

$a(2b-a)\leqslant 27\times 55<3^9$， 故 $x=2$，$a(2b-a)=2^9$，

设 $a=2^k$，则由 $a=\frac{2^9}{2b-a}\geqslant\frac{2^9}{55}>9$，及 $a^2<a(2b-a)=2^9$，知 $k=4$，即 $a=16$，从而 $b=24$。代入 $\log_2(c^2+60b-11a)=11$，$c^2+60\times 24-11\times 16=2^{11}$， $\therefore$ $c=28$，$a+c-2b=-4$。

(7) ［解］(E) 如图， $\because$ $\triangle CED\backsim\triangle CBA$， $\therefore$ $\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{AC}=\cos 60^\circ$ $=\frac{1}{2}$， $DE=\frac{1}{2}AB$。同理，$DF=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$。

$\therefore$ $\frac{DE}{DF}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。



第 二 试

1．〔分析〕 若记关于 x 的一元三次方程 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0(a_0\neq0)$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3，则有

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases}$$

这是三次方程的韦达定理。反之若 x_1, x_2, x_3 满足上述条件，则它们必是方程 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根。应用此逆定理可解某些三次对称方程组，本题就是其中之一。

〔解〕 设 $\operatorname{tg}A=a$，$\operatorname{tg}B=b$，$\operatorname{tg}C=c$。由题设知：

$$abc=a+b+c=-\frac{1}{6},\quad a^3+b^3+c^3=-\frac{181}{216}.$$

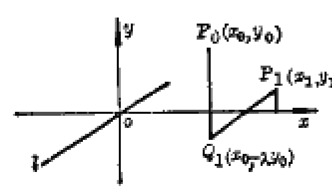
又
$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)], \end{aligned}$$

$$\therefore\quad ab+bc+ca=-\frac{1}{3}\left[\frac{-\frac{181}{216}+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{6}}-\frac{1}{36}\right]=-\frac{2}{3}.$$

因此 a, b, c 是方程 $6x^3+x^2-4x+1=0$，即 $(x+1)(2x-1)(3x-1)=0$ 的三个根。

$\therefore$ $\operatorname{tg}A$，$\operatorname{tg}B$，$\operatorname{tg}C$ 分别为 -1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，因此 $\triangle ABC$ 的三内角分别为 $\frac{3\pi}{4}$，$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$，$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$（可以随意排列）。

2．〔解〕 如图，$P_0(x_0, y_0)$ 关于 x 轴的 λ 对称点 Q_1 的坐标为 $(x_0, -\lambda y_0)$，若 P_1 的坐标为 (x_1, y_1)，则 $y_1=-\mu(-\lambda y_0)=\lambda\mu y_0$。



$$a(x_1-x_0)+b(y_1+\lambda y_0)=0,$$

故 $x_1=x_0-\frac{b}{a}(y_1+\lambda y_0)=x_0-\frac{b}{a}y_0\lambda(1+\mu)$。

同理，$\begin{cases} x_2=x_1-\dfrac{b}{a}\lambda y_1(1+\mu), \\ y_2=\lambda\mu y_1. \end{cases}$

一般地，$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{b}{a}\lambda y_n(1+\mu), \\ y_{n+1}=\lambda\mu y_n. \end{cases}$

于是得 $y_{n+1}=\lambda\mu y_n=\cdots=(\lambda\mu)^{n+1}\cdot y_0$。

(1) 当 $0<\lambda\mu<1$ 时，$y_{n+1}\to0$，此时

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_1-x_0)+x_0\\ &=x_0-\frac{b}{a}\lambda(1+\mu)(y_0+y_1+\cdots+y_n)=x_0-\frac{b}{a}y_0\lambda(1+\mu)\cdot\frac{1-(\lambda\mu)^{n+1}}{1-\lambda\mu}\\ &\to x_0-\frac{b}{a}y_0\lambda(1+\mu)\cdot\frac{1}{1-\lambda\mu}. \end{aligned}$$

故收敛点坐标为 $\left(x_0-\dfrac{by_0\lambda(1+\mu)}{a(1-\lambda\mu)}, 0\right)$。

(2) 当 $\lambda\mu>1$ 时，$y_{n+1}=(\lambda\mu)^{n+1}y_0$，只有当 $y_0=0$ 时才收敛。此时 $y_k\equiv0$，故 $x_{n+1}=x_n=x_{n-1}=\cdots=x_0$，收敛点坐标为 $(x_0, 0)$。

(3) 当 $\lambda\mu=1$ 时，$y_k\equiv y_0$，

$$x_{n+1}=x_0-\frac{b}{a}\lambda(1+\mu)(n+1)y_0.$$

若要 x_{n+1} 收敛，必需 $by_0=0$，此时 $x_{n+1}=x_0$。

若 $b\neq0$，收敛点坐标为 $(x_0,0)$。

若 $b=0$，收敛点坐标为 (x_0,y_0)。

3. ［证法一］ 答案是否定的。

如果存在 $(n+1)$ 个实系数的多项式 $P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)$ 使 $P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_n(x)\equiv0$（其中 $y=\sin x$），则 $P_n(k\pi)=0(k\in Z)$，故 $P_n(x)\equiv0$。

于是得 $y\cdot[P_0(x)y^{n-1}+P_1(x)y^{n-2}+\cdots+P_{n-1}(x)]\equiv0$。由于 $y=\sin x$ 仅当 $x=k\pi$ 时为零，所以当 $x\neq k\pi$ 时，$P_0(x)y^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x)=0$。

但 $P_0(x),P_1(x),\cdots,P_{n-1}(x)$ 与 $\sin x$ 都是 x 的连续函数，故可取一组点列 $x_m=k\pi+\frac{\pi}{m}\to k\pi$，从而有 $P_0(x)y^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x)\equiv0$。用上面相同理由可得到 $P_{n-1}(x)\equiv0$，依次类推，最后证明了 $P_0(x)\equiv0$，但这与 $a_0\neq0$ 相矛盾。

［证法二］ 如果存在 $(n+1)$ 个实系数的多项式 $P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)$，使

$$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_n(x)\equiv0\quad(\text{其中 } y=\sin x),\tag{①}$$

设 $(n+1)$ 个多项式中，次数最高的依次为 $P_{i_0}(x),P_{i_1}(x),\cdots,P_{i_j}(x)\ (i_0<i_1<\cdots<i_j)$。它们的次数为 $m_1(\geqslant0)$，首项系数为 $a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_j}$ 都不为零。

考虑方程 $a_{i_0}y^{n-i_0}+a_{i_1}y^{n-i_1}+\cdots+a_{i_j}y^{n-i_j}=0$，它只有有限个实根，故存在 $\alpha\in(0,1]$，使

$$a_{i_0}\alpha^{n-i_0}+\cdots+a_{i_j}\alpha^{n-i_j}\neq0,\tag{②}$$

令 $\theta=\arcsin\alpha$，$x_k=2k\pi+\theta$，则 $\sin x_k=\sin\theta=\alpha$，在①式中令 $x=x_k$，并除以 $x_k^{m_1}$ 得

$$\frac{P_0(x_k)\sin^n x_k}{x_k^{m_1}}+\cdots+\frac{P_{i_0}(x_k)\sin^{n-i_0}x_k}{x_k^{m_1}}+\cdots+\frac{P_n(x_k)}{x_k^{m_1}}=0\quad(x_k=2k\pi+\theta\neq0).$$

令 $k\to+\infty$，于是有 $a_{i_0}\alpha^{n-i_0}+a_{i_1}\alpha^{n-i_1}+\cdots+a_{i_j}\alpha^{n-i_j}=0$，这与②式相矛盾。

［说明］ 本题的意义，在于指出 $y=\sin x$ 是超越函数。

1984年上海市中学生数学竞赛试题

第 一 试

1．选择题(每小题答对得5分，答错得0分，不答得1分)

(1) 某大学有外语教师120名，其中教英语的有50名，教日语的有45名，教法语的有40名。有15名既教英语又教日语，有10名既教英语又教法语，有8名既教日语又教法语，有4名教英语日语和法语三门课，则不教这三门课的外语教师有

(A) 10名 (B) 14名 (C) 18名 (D) 22名 (E) 26名。

(2) $1+\frac{20\times19}{1\times2}+\frac{20\times19\times18\times17}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{20\times19\times\cdots\times1}{1\times2\times\cdots\times20}$ 等于

(A) 2^{17} (B) 2^{18} (C) 2^{19} (D) 2^{20} (E) 其它。

(3) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，则 $\sin^2 A+2\sin B$

(A) 有最大值无最小值 (B) 有最小值无最大值 (C) 有最大值也有最小值

(D) 无最大值也无最小值 (E) 等于常数。

(4) 已知 $25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$，$\theta$ 在第二象限内，则 $\cos\frac{\theta}{2}$ 等于

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\pm\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) 其它。

(5) 已知 $\log_{\operatorname{tg}\theta}\cos\theta=\frac{2}{3}$，$\theta$ 是锐角，则 $\log_{(1+\operatorname{ctg}^2\theta)}\frac{1}{2}\sin 2\theta$ 的值为

(A) $-\frac{7}{4}$ (B) $\frac{7}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $-\frac{7}{10}$。

(6) $ABCDEF—A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 是正六棱柱，M 是 DE 的中点，这正六棱柱过 A_1，C，M 三点的截面是

(A) 三角形 (B) 四边形 (C) 五边形 (D) 六边形 (E) 七边形。

(7) 与空间不共面的四点距离相等的平面有

(A) 3个 (B) 4个 (C) 6个 (D) 7个 (E) 其它。

(8) 平面上有15条直线，其中有5条共点，它们最多能将平面划分成的区域数为

(A) 111 (B) 114 (C) 115 (D) 118 (E) 121。

(9) 小于50000且含有奇数个数字“5”的五位数共有

(A) 2952个 (B) 11808个 (C) 16160个 (D) 26568个 (E) 36160个。

(10) 圆柱直径为$4R$，高为$22R$，最多能装直径为$2R$的球

(A) 24个 (B) 28个 (C) 32个 (D) 44个 (E) 其它。

2．填充题(下面各题答对得5分，答错得0分)

(1) 方程：$\frac{2+\sqrt{2}\sin x}{2\cos x+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cos x+2}{2\sin x+\sqrt{2}}$ 的解是____。

(2) 不等式：$|1-x|^{2x^2-7x+3}<1$ 的解是____.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，且 $\angle A<\angle B<\angle C$，两质点分别在 $\triangle ABC$ 的两个顶点 B、C 开始沿 $\triangle ABC$ 的边线按逆时针方向作速度相等的等速运动，则在运动过程中，它们之间的最短距离等于____.

(4) 函数 $f(x)=\arcsin(\arcsin x)+\arccos\left(\dfrac{2\arccos x}{\pi-2}\right)$的定义域为____.

(5) 曲线：$x^2+y^2-x+2y=0$ 关于直线 $x-y+1=0$ 的对称曲线方程为____.

(6) 方程：$z^4=\bar{z}$($\bar{z}$ 为 z 的共轭复数)的根为____.

(7) 在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 BC、CA 上的点，且 $BD:DC=m:1$，$CE:EA=n:1$，AD 与 BE 相交于 F，则 $\triangle ABF$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的____倍.

(8) 过二次曲线 C_1：$3x^2+8y^2-6x-32y=0$ 与 C_2：$9x^2-16y^2-18x+24y=0$ 的交点的抛物线方程为____.

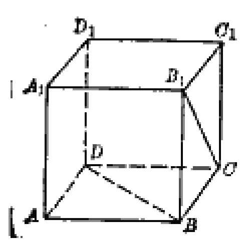
(9) 将 19 分成若干个正整数之和，其积最大为____.

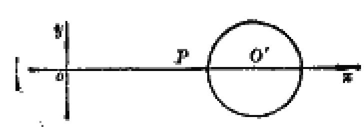
(10) 对于已知的 x，y 把 2^{-x}，2^{x-y}，2^{y-1} 的最小值记作 $F(x, y)$，当 $0<x<1$，$0<y<1$ 时，$F(x, y)$的最大值等于____.

第 二 试

1. (本题 20 分) 求二元函数 $f(x, y)=x^2+4xy+2y^2$ 在$\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

2. (本题 20 分) 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图，$AB=18$，$AA_1=AD=9$，BD 与 B_1C 的公垂线的垂足为 M、N，试求 MN 的中垂面与长方体截面的面积.





3. (本题 20 分) 设平面上有一圆，它的每一点都以角速度 ω 绕原点 O 顺时针旋转，同时该圆周上一点 P 以角速度 2ω 绕圆心 O' 逆时针旋转. 若时间 $t=0$ 时，圆心 O' 的坐标为$(l+r, 0)$，动点 P 的坐标为$(l, 0)$，如图，求点 P 的轨迹方程.(其中 $l>0$，$r>0$)

4. (本题 20 分) 设多项式 $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$，其中 $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 n 个不同的整数，试证 $P(x)$不能分解为两个次数大于零的整系数多项式之积.

5. (本题 20 分) 已知 k、n 为正整数，把 k 分成 n 个正整数的和，对于各种分法，它们乘积的最大值为 $F(k)$，如果 k 除以 n 得商为 q，余数为 r，

(1) 求证：$F(k)=q^{n-r}\cdot(q+1)^r$；(2) 求 $\dfrac{F(k+2)}{F(k)}$.

解　答

第　一　试

1. (1) [解](B)　$120-[(50+45+40)-(15+10+8)+4]=14$。

(2) [解](C)　原式 $=C_{20}^{0}+C_{20}^{2}+C_{20}^{4}+\cdots+C_{20}^{20}=2^{20-1}=2^{19}$。

(3) [解](D)　∵　$\sin^2A+2\sin B=1-\sin^2B+2\sin B=2-(\sin B-1)^2$, $0°<B<90°$,

∴　$\sin^2A+2\sin B$ 无最大值也无最小值。

(4) [解](B)　$(25\sin\theta-24)(\sin\theta+1)=0$,

∵　θ 在第二象限内, $\sin\theta>0$,　∴　$\sin\theta=\frac{24}{25}$,

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{7}{25}。\quad ∴\quad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\frac{3}{5}。$$

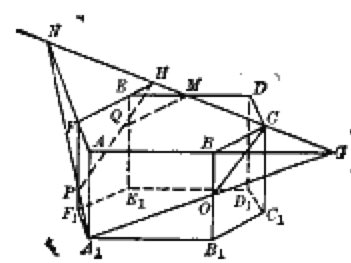
(5) [解](E)　∵　θ 为锐角, 且 $\log_{tg\theta}\cos\theta=\frac{2}{3}$,

∴　$\cos\theta=tg^{\frac{2}{3}}\theta$,

即 $\cos^5\theta=\sin^2\theta$,　$\cos\theta=\sin^{\frac{2}{5}}\theta$。

$$∴\quad \log_{(1+tg^2\theta)}\frac{1}{2}\sin2\theta=\log_{\frac{1}{\sin^2\theta}}\sin\theta\cos\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\log_{\sin\theta}\sin\theta\cdot\sin^{\frac{2}{5}}\theta=-\frac{7}{10}。$$



(6) [解](D)　由作图可知过 A_1, C, M 的截面为六边形。

(7) [解](D)　适合题意的平面分两类:

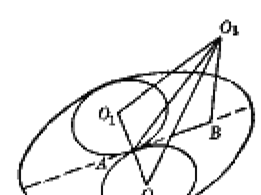
i) 两侧各有两点的有 $\frac{1}{2}C_4^2=3$ 个;

ii) 两侧分别有一点、三点的平面有 $C_4^1=4$ 个。

∴　适合题意的平面共有 7 个。

(8) [解](C)　5 条共点的直线把平面划分成区域数是 10, 增加一条直线, 分别与这 5 条直线相交, 则此直线被这 5 条直线分成 6 段, 区域数就增加了 6 个。余此类推, 得到总区域数

$$10+6+7+\cdots+15=115。$$



(9) [解](B)　∵　所求的五位数小于 50000,　∴　首位不能放 5。

i) 小于 50000, 且含有 1 个 5 的五位数有 $4\times C_4^1\times9^3$ 个;

ii) 小于 50000, 且含有 3 个 5 的五位数有 $4\times C_4^3\times9$ 个。

∴　适合条件的五位数有 $4(C_4^1\times9^3+C_4^3\times9)=11808$ 个。

(10) [解](E)　最底层放二个 O_1 球和 O_2 球, 它们彼此相切, 同时与圆柱相切。在 O_1 球和 O_2 球上面放上 O_3 球和 O_4 球, 使 O_1O_2 与 O_3O_4 垂直, 且这四个球中任二个球相切。同样在 O_3 球和 O_4 球上面放 O_5 球和 O_6 球, ……, 直到不能再放为止。显然最底层二个球的球心比圆柱下底面升高 R。下面来计算球心 O_3 和 O_4 比过球心 O_1 和 O_2 且平行底面的平面升高的高度。过 O_1 和 O_2 且平行于圆柱底面的平面截球 O_1、O_2 及圆柱得到的是圆, 所求的高度就是 O_3 到这个平面的距离 $d=O_3B$, 如右上图。

设 O_1 球与 O_2 球相切于 A 点　∵　$O_1O_3=2R$, $O_2O_3=2R$, $O_1A=O_2A=R$,　∴　$O_3A=\sqrt{3}R$,

∵　O_3 球与圆柱相切,　∴　$AB=2R-R=R$,

∴　$d=O_3B=\sqrt{O_3A^2-AB^2}=\sqrt{2}R$,

设在 O_1 球和 O_2 球上能装 k 层，则 k 满足：

$$22R-\sqrt{2}R<R+\sqrt{2}R\cdot k+R\leqslant 22R,$$

$k=14$。 ∴ 最多能装 30 个。

2. (1) ［解］ 去分母、化简整理得：

$$(\sin x-\cos x)(3+\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x)=0.$$

$$\because\ \sqrt{2}(\sin x+\cos x)\geqslant -2,\ 3+\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x\geqslant 1,$$

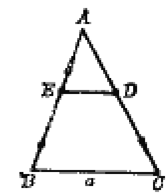
∴ $\sin x-\cos x=0$。注意到 $2\cos x+\sqrt{2}\neq 0$, $2\sin x+\sqrt{2}\neq 0$,

∴ 方程解是：$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\quad(k\in Z)$。

(2) ［解］ 满足不等式的 x 由下列不等式组得到：

$$\begin{cases}|1-x|<1,\\2x^2-7x+3>0;\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}|1-x|>1,\\2x^2-7x+3<0.\end{cases}$$

∴ 不等式的解是：$0<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $2<x<3$。



(3) ［解］ i) 在运动过程中，若两个质点在三角形的一条边上，它的距离为 $d=a$。

ii) 在运动过程中，若两个质点在三角形的两条边上，则因为 $\angle A<\angle B<\angle C$，所以两质点只能分别在 $\angle A$ 的两条边上才能取最短距离。设两质点分别运动到 D、E 二点上，$AD=x$，则 $AE=a-x$。

$$d=ED=\sqrt{x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\cos A}=\sqrt{2(1+\cos A)x^2-2a(1+\cos A)x+a^2},$$

∴ 当 $x=\dfrac{a}{2}$ 时，$d_{\min}=a\sin\dfrac{A}{2}$。

(4) ［解］ x 必须满足：

$$\begin{cases}-1\leqslant \arcsin x\leqslant 1,\\-1\leqslant \dfrac{2\arccos x}{\pi-2}\leqslant 1;\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-\sin 1\leqslant x\leqslant \sin 1,\\\cos\dfrac{\pi-2}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

∵ $\cos\dfrac{\pi-2}{2}=\sin 1$， ∴ 已知函数的定义域是单点集 $\{\sin 1\}$。

(5) ［解］ $x^2+y^2-x+2y=0$ 可配方为 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{5}{4}$。

∵ 圆心 $O_1\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 关于直线 $x-y+1=0$ 的对称点是 $O_1'\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$，

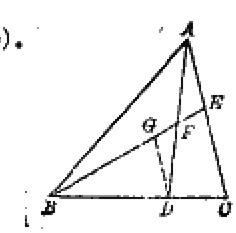
∴ 已知圆的对称曲线方程是，

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

(6) ［解］ 在 $z^4=\bar{z}$ 两边取模得 $|z^4|=|\bar{z}|=|z|$， ∴ $|z|=0$ 或 $|z|=1$。
若 $|z|=0$，则 $z=0$；若 $|z|=1$，则 $z^5=\bar{z}\cdot z=|z|^2=1$，

$$z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\quad(k=0、1、2、3、4).$$

∴ 已知方程的根是：$z=0$ 或 $z=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}\quad(k=0、1、2、3、4)$。



(7) ［解］ 如图，自 D 作 $DG\parallel AC$，交 BE 于 G。则

$$\frac{DG}{CE}=\frac{BD}{BC}=\frac{BD}{BD+DC}=\frac{m}{m+1},$$

$$\frac{DG}{EA}=\frac{DG}{CE}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{mn}{m+1},$$

$$\frac{AF}{FD}=\frac{EA}{DG}=\frac{m+1}{mn},$$

$$\frac{AF}{AD}=\frac{AF}{AF+FD}=\frac{m+1}{mn+m+1}.$$

于是 $\dfrac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{m+1}{mn+m+1}$， $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{m}{m+1}$。

将二式相乘即得 $\dfrac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{m}{mn+m+1}$。

(8) [解] 过 C_1、C_2 交点的二次曲线系是

$$k(3x^2+8y^2-6x-32y)+l(9x^2-16y^2-18x+24y)=0,$$

即
$$(3k+9l)x^2+(8k-16l)y^2-(6k+18l)x+(-32k+24l)y=0,$$

这里 k、l 为待定常数，且不同为零。如果它代表抛物线，则必须 $B^2-4AC=0$，即 $(3k+9l)(8k-16l)=0$，此时 $k=-3l$，或 $k=2l$。

当 $k=2l$ 时，得抛物线 $3x^2-6x-8y=0$；当 $k=-3l$ 时，得 $y^2-3y=0$，它是抛物线的退化情况，代表两条平行直线 $y=0$，$y=3$。

(9) [解] 对任一个正整数 $k\geqslant3$，要把它分成若干个正整数之和，其积要取得最大，则必须满足：

(i) 分成的正整数只能是 2 和 3。

因 $4=2+2$，且 $4=2\times2$，故若分出的数中有 4，则拆成两个 2，其积不变；若分出的数中有数 $a\geqslant5$，则只要把 a 拆成 2 与 $a-2$，由 $2(a-2)>a$ 知积将增大。

(ii) 分成的正整数中，2 的个数最多只能 2 个。

因为若 2 的个数至少有 3 个，则由 $3+3=2+2+2$ 及 $3\times3>2\times2\times2$ 知将其中 3 个 2 换成 2 个 3，其积将增大。

∴ 将 19 分成 5 个 3 与 2 个 2 的和，这些数的积 $3^5\times2^2=972$ 是最大的。

(10) [解] ∵ $F(x,y)=\min(2^{-x},2^{x-y},2^{y-1})\leqslant\sqrt[3]{2^{-x}\cdot2^{x-y}\cdot2^{y-1}}=2^{-\frac{1}{3}}$，

又当 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ 时，$F(x,y)=2^{-\frac{1}{3}}$。

∴ $F(x,y)$ 的最大值是 $2^{-\frac{1}{3}}$。

第 二 试

1. [解] 设 $\begin{cases}x=R\cos\phi\\ y=R\sin\phi,\end{cases}$ $(0\leqslant R\leqslant1,\ 0\leqslant\phi\leqslant\pi)$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=R^2(\cos^2\phi+4\sin\phi\cos\phi+2\sin^2\phi)\\&=R^2\left(\frac{1+\cos2\phi}{2}+2\sin2\phi+1-\cos2\phi\right)=\frac{R^2}{2}(3+4\sin2\phi-\cos2\phi),\end{aligned}$$

设 $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$，则 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$。

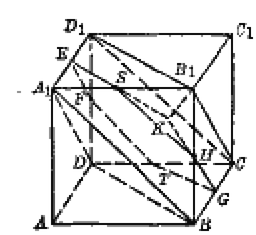
$$\therefore\quad f(x,y)=\frac{R^2}{2}[3+\sqrt{17}\sin(2\phi-\theta)]。$$

当 $2\phi-\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\phi=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$，$R=1$ 时，

$$[f(x,y)]_{max}=\frac{3+\sqrt{17}}{2};$$

当 $2\phi-\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，即 $\phi=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$，$R=1$ 时，

$$[f(x,y)]_{min}=\frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$



2. [解] 连结 B_1D_1，CD_1，A_1B，A_1D。设所求的中垂面是 α 平面。

∵ $B_1C\parallel A_1D$，$BD\parallel B_1D_1$，

又 ∵ $\alpha \parallel B_1C$，$\alpha \parallel BD$，

∴ α 平面是平行于 $\triangle CB_1D_1$ 平面和 $\triangle A_1BD$ 平面，且与这二个平面等距的平面．设 E、F、G、H 分别是 A_1D_1、D_1D、BC、BB_1 的中点，因 $EF \parallel A_1D$，$GH \parallel B_1C$，故 $EF \parallel HG$，EF 与 HG 所确定的平面就是 α 平面。

延长 GH、C_1B_1 相交于 K 点，则 $\triangle B_1KH \cong \triangle BGH$，故 $B_1K = BG = AE$，所以，连结 EK 必交 A_1B_1 的中点 S．同理，设 CD 的中点 T，连结 FT、TG，则中垂面 α 与长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的截面就是六边形 $EFTGHS$。

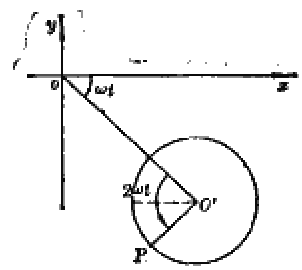
∵ $ST \parallel B_1C$，

∴ $ST \parallel EF \parallel GH$。

∵ $EF = \frac{1}{2}A_1D = \frac{9\sqrt{2}}{2}$，$ST = A_1D = 9\sqrt{2}$，

$ES = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{9\sqrt{5}}{2}$，$FT = \frac{1}{2}CD_1 = \frac{9\sqrt{5}}{2}$，

∴ $S_{截} = 2S_{梯形\ EFTS} = \frac{27^2}{4}$。



3．［解］ 把时间 t 取作为参数 ($t \geqslant 0$)。如图表示在任意时刻 t，P 点和圆心 O' 点的位置，此时，圆心 O' 和 P 点同时绕 O 顺时针旋转了 ωt 角，P 点再绕 O' 逆时针旋转了 $2\omega t$ 角。

设 $P(x, y)$，$O'(x_1, y_1)$，则 O' 点坐标满足关系式

$$\begin{cases} x_1 = (l+r)\cos(-\omega t), \\ y_1 = (l+r)\sin(-\omega t); \end{cases} \quad ①$$

P 点坐标满足关系式

$$\begin{cases} x = x_1 + r\cos(\pi + \omega t), \\ y = y_1 + r\sin(\pi + \omega t). \end{cases} \quad ②$$

把①代入②就得到 P 点的轨迹参数方程

$$\begin{cases} x = (l+r)\cos\omega t - r\cos\omega t = l\cos\omega t, \\ y = -(l+r)\sin\omega t - r\sin\omega t = -(l+2r)\sin\omega t. \end{cases}$$

消去 t，得 P 点的轨迹方程是：

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{(l+2r)^2} = 1,$$

它表示一个椭圆。

4．［解］ 假设 $P(x)$ 能分解为两个次数大于零的整系数多项式之积，即 $P(x) = g(x)h(x)$。

∵ $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$，

∴ $a_1, a_2, \cdots a_n$ 为 $P(x) = -1$ 的 n 个不同的整数解， ∴ $a_1, a_2, \cdots a_n$ 也是 $g(x)h(x) = -1$ 的 n 个不同的整数解．∵ $g(x)$，$h(x)$ 是整系数多项式，且 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 是整数。∴ $g(a_i)$，$h(a_i)$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ 分别是整数 $1, -1$；或 $-1, 1$．故 $g(a_i) + h(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots n)$。

∴ $a_1, a_2 \cdots a_n$ 是 $g(x) + h(x) = 0$ 的 n 个不同的整数解。但 $h(x)$ 和 $g(x)$ 是低于 n 次且最高次项系数之积为 1 的多项式，$g(x) + h(x) = 0$ 不可能有 n 个不同的解。因而推出矛盾。

∴ $P(x)$ 不能分解为两个次数大于零的整系数多项式之积。

5．［解］ (1) k 分成 n 个正整数之和的方法是有限的，故积的最大值 $F(k)$ 存在。

如积最大，所分成的 n 个正整数中任意两个之差的绝对值要小于 2。这是因为，若所分的 n 个正整数中有 a，$a+s$ 两个 ($s \geqslant 2$)，则用 $a+1$，$a+s-1$ 分别代替 a，$a+s$，由

$$a(a+s) < (a+1)(a+s-1)$$

即知乘积将要增大。

由此可知，要积最大，所分成的 n 个正整数中，最大数与最小数之差≤1。

设 $k=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，且 $0\leqslant a_n-a_1\leqslant 1$。则 $na_1\leqslant k<na_1+n$，即 $a_1\leqslant \frac{k}{n}<a_1+1$，

∴ $a_1=\left[\frac{k}{n}\right]=q$，因此当 $k=\underbrace{q+\cdots+q}_{(n-r)个}+\underbrace{(q+1)+\cdots+(q+1)}_{r个}$时，

所得的积 $q^{n-r}(q+1)^r$ 最大。即 $F(k)=q^{n-r}(q+1)^r$。

(2) 设 $k=nq+r$，$0\leqslant r<n$，则

$$F(k)=q^{n-r}(q+1)^r.$$

若 $r<n-2$，则 $k+2=nq+(r+2)$，$0\leqslant r+2<n$，

故 $F(k+2)=q^{n-r-2}(q+1)^{r+2}$。

$$\therefore\quad \frac{F(k+2)}{F(k)}=\frac{q^{n-r-2}(q+1)^{r+2}}{q^{n-r}(q+1)^r}=\left(\frac{q+1}{q}\right)^2;$$

若 $r=n-2$，则 $k+2=nq+(n-2)+2=n(q+1)$，

故 $F(k+2)=(q+1)^n$，$F(k)=q^{n-(n-2)}(q+1)^{n-2}=q^2(q+1)^{n-2}$

$$\therefore\quad \frac{F(k+2)}{F(k)}=\left(\frac{q+1}{q}\right)^2;$$

若 $r=n-1$，则 $k+2=nq+(n-1)+2=n(q+1)+1$，

故 $F(k+2)=(q+1)^{n-1}(q+2)$，

$$\therefore\quad \frac{F(k+2)}{F(k)}=\frac{(q+1)^{n-1}(q+2)}{q^{n-(n-1)}(q+1)^{n-1}}=\frac{q+2}{q}.$$

1985年上海市中学生数学竞赛试题

第 一 试

1．选择题(答对者得4分，不答者得1分，答错者得0分)。

(1) 用1，9，8，5四个数码构成形如 $a^{b^{c^d}}$ 的数，若欲使其值最大，则 c 的值为

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 5。

(2) 从 $A\cup B=A\cup C$ 能够推出

(A) $B=C$ (B) $A\cap B=A\cap C$ (C) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$ (D) $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$。

(3) 设平面上四点 $A(\sqrt{2},1+\sqrt{2})$，$B(-\sqrt{2},1-\sqrt{2})$，$C(\sqrt{3},2)$，$D(-2\sqrt{3},1)$，能和线段 AB 和 CD 在端点分别相切的圆有

(A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 4个。

(4) 对任何 $x\in(1,a)$ 都有

(A) $\log_a(\log_a x)<\log_a x^2<(\log_a x)^2$

(B) $\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2<\log_a x^2$

(C) $\log_a x^2<\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2$

(D) $(\log_a x)^2<\log_a x^2<\log_a(\log_a x)$。

(5) 曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$ 和 $3x^2-4xy+y^2-3x+y=0$ 的交点有

(A) 2个 (B) 3个 (C) 4个 (D) 其他。

(6) 使方程 $\sin^2 x+3a^2\cos x-2a^2(3a-2)-1=0$ 有解，a 的范围是

(A) $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$ (B) $a>1$ 或 $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$。

(7) 函数 $f(x)=-9x^2-6ax+2a-a^2$ 在区间 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 上的最大值为 -3，则 a 的值可为

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{6}+2$ (D) $\sqrt{6}-2$。

(8) 一对四位数中，一个数的首末两个数字对调就是另一个数（例如：1234和4231，1231与1231都是这样的数对)，那末两数和是四位数而且是完全平方数的这种数对有

(A) 4对 (B) 6对 (C) 8对 (D) 10对。

(9) 整数组 (x_1,x_2,x_3,x_4) 适合 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4<7$，这样的数组共有

(A) 108组 (B) 126组 (C) 252组 (D) 其他。

(10) n 为不超过1985的正整数，如果有一个 θ 使 $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta$

成立，则这种 n 的总个数为

(A) 1985　(B) 992　(C) 497　(D) 496。

2. 填充题(下面各题答对得4分，否则得0分)

(1) 平面 M 与 N 相交成角 θ，则 M 平面上的圆在 N 平面上的正投影椭圆的离心率等于_______。

(2) 设 $|z|=1$，则 $|z^2-z+2|$ 的最小值为_______。

(3) 单位正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 上一动点 P，$t=0$ 时从 A 点出发沿它的棱 AB，BC 作速率为常数 v 的运动，当 P 到达 BC 棱上某一位置时，则点 P 到 AB' 的距离 S 的平方表示为时间 t 的函数表达式__________。

(4) 命题 (a) "所有的 S 是 P"和"所有的 S 不是 P"相否定；(b) "有些 S 不是 P"，那么"有些 P 不是 S"；(c) 如果"所有的 S 都是 P"，那么"有些 P 是 S"；(d) "所有的 S 是 P"和"有些 S 不是 P"相否定。上面四条命题中所有正确的命题号码为______。

(5) $\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8+1\right]^n$ 当 n 取 1, 2, …, 100 时，可得____不同的数值。

(6) 设 $0<\alpha、\beta<\pi$，且 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，则 $2\alpha+\beta=$_______。

(7) 已知 $\sin x+\sin y=\sqrt{2}$，　　$\cos x+\cos y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

则 $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=$_______。

(8) 单位正方体 C 内作一个内切大球 O_1，其次在 C 内的一个角顶内作小球 O_2，使它与大球外切，同时切于 C 的三个面，则球 O_2 的面积为_______。

(9) 已知三棱锥 $P—ABC$ 顶角的三个面角均为 $60°$，三个侧面的面积分别为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，2 和 1，则三棱锥的体积为_______。

(10) x, y, z 均为正整数，方程 $x+y+z=15$ 有____组解。

第　二　试

1. (本题15分)　已知抛物线 C_1 的顶点 $(\sqrt{2}-1, 1)$，焦点 $\left(\sqrt{2}-\frac{3}{4}, 1\right)$，另一抛物线 C_2 的方程 $y^2-ay+x+2b=0$，C_1 与 C_2 在一个交点处它们的切线互相垂直，试证 C_2 必过定点，并求该点坐标。

2. (本题15分)　n 名队员穿1至 n 号球衣，坐成一排，并不允许号码大于 p(p 为某一确定的数)的队员坐在 p 号队员的右侧，问共有几种坐法？

3. (本题15分)　设正四棱锥 P 的底是边长为2的正方形，高是 h，平面 π 平行于正方形的一条对角线，与 P 的底面交角为 α，把 P 正投影到 π 上，问 α 为何值时，所得图形面积最大？最大值是多少？

4. (本题15分)　已知 $A、B、C、D$ 为平面上两两距离不超过1的任意四个点，今欲作一圆覆盖此四点(即 $A、B、C、D$ 在圆内或圆周上)，问半径最小该为多少？试证明之。

解　　答

第　一　试

1. (1) [分析]　因 $1^n=1$，故要使形如 $a^{b^{c^{d}}}$ 的数值最大，$d=1$。将 9，8，5 三个数码构成形如 $a^{b^{c}}$ 的数，有 6 种方法。比较这 6 个数的大小才能判断哪一个数的值最大。

[解](B)　要 $a^{b^{c^{d}}}$ 的值最大，$d=1$。

∵　$8^9=2^{27}=(2^{10})^2\times 2^7>1000^2\times 100=10^8>9^8$，

∴　$5^{8^{9^{1}}}>5^{9^{8^{1}}}$。

同样由 $5^9=125^3>81^3=9^6>9^5$ 知 $8^{5^{9^{1}}}>8^{9^{5^{1}}}$；

由 $8^5=2^{15}<2^{16}=4^8<5^8$ 知 $9^{5^{8^{1}}}>9^{8^{5^{1}}}$。

另一方面，显然 $5^{8^{9^{1}}}=[5^{(8/5)^9}]^{5^{9^{1}}}>(5^2)^{5^{9^{1}}}>8^{5^{9^{1}}}$，

$$5^{8^{9^{1}}}=(5^8)^{8^{8^{1}}}>9^{8^{8^{1}}}>9^{5^{8^{1}}},$$

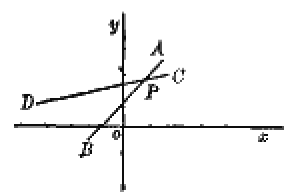
故最大值是 $5^{8^{9^{1}}}$，即 $c=9$。

(2) [解](D)　取 $A=I$，$B\neq C$，则 $A\cup B=A\cup C$，但(A)、(B)、(C)都不对，故选(D)。

[说明]　也可直接证明(D)成立：

$$A\cup B=A\cup C\Longrightarrow \bar{A}\cap(A\cup B)=\bar{A}\cap(A\cup C)\Longrightarrow \bar{A}\cap B=\bar{A}\cap C.$$

(3) [分析]　由草图可见，线段 AB、CD 相交于点 P。若有圆与 AB、CD 在端点相切，则 P 到这两端必等距；反之，若 P 到某两端等距，则必有圆与 AB、CD 在这两端分别相切。因此，考察 $|PA|$、$|PB|$、$|PC|$、$|PD|$ 中几对相等，就能判定有几个圆满足条件。



[解](A)　线段 AB 的方程为 $y=x+1\,(-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，线段 CD 的方程为 $3\sqrt{3}\,y=x+5\sqrt{3}\,(-2\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3})$。解得交点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{9+\sqrt{3}}{13},\ \dfrac{22+\sqrt{3}}{13}\right)$。容易计算得知 $|PA|$、$|PB|$、$|PC|$、$|PD|$ 各不相等。

∴　与 AB、CD 同时相切，且切点都在端点的圆不存在。

(4) [解](B)　∵　$x\in(1,a)$，　∴　$a>1$，且 $0<\log_a x<1$，于是 $\log_a(\log_a x)<0<(\log_a x)^2<\log_a x<2\log_a x=\log_a x^2$。

(5) [解](D)　$2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$，即 $(2x+y+1)(x-y-1)=0$，亦即 $2x+y+1=0$ 或 $x-y-1=0$。同理，$3x^2-4xy+y^2-3x+y=0$ 即 $3x-y=0$ 或 $x-y-1=0$。∴　已知两曲线都可退化成两直线，且有一对直线重合。故两曲线有无穷多个公共点。

(6) [解](A)　原方程即是 $\cos^2x-3a^2\cos x+2a^2(3a-2)=0$。它有解的充要条件是下面的二次方程 $t^2-3a^2t+2a^2(3a-2)=0$ 在 $[-1,1]$ 内有解。上面的二次方程就是

$$(t-2a)[t-(3a^2-2a)]=0.$$

∴　a 的取值范围是 $\{a\mid |2a|\leqslant 1\}\cup\{a\mid |3a^2-2a|\leqslant 1\}$

$$=\left\{a\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{a\,\middle|\,-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1\right\}=\left\{a\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1\right\}.$$

(7) [解](C)　$f(x)=-(3x+a)^2+2a$，而

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3},\quad -1\leqslant 3x\leqslant 1.$$

若 $-1\leqslant a\leqslant 1$，则当 $3x=-a$ 时，$[f(x)]_{\max}=2a=-3$，$a=-\dfrac{3}{2}$，这与 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 的假设矛盾。

若 $a>1$，则当 $3x=-1$ 时，$[f(x)]_{\max}=-(-1+a)^2+2a=-3$，即 $a^2-4a-2=0$，$a=2\pm\sqrt{6}$。其中 $a=2+\sqrt{6}$ 适合 $a>1$。

［说明］ 若 $a<-1$，则当 $3x=1$ 时，$[f(x)]_{max}=-(1+a)^2+2a=-3$，$a^2=2$，由此可得 a 的另一个可能值 $-\sqrt{2}$。

(8) ［解］(D) 设 $\overline{abcd}$，$\overline{dbca}$ 是适合题意的一对四位数，且 $a\leqslant d$。

因为 $\overline{abcd}+\overline{dbca}=1001(a+d)+20(10b+c)$ 是四位数，故 $2\leqslant a+d\leqslant 9$，且它的个位数是 $a+d$。又因为它是完全平方数，其个位数只能取 0，1，4，5，6，9 六个数字。由此知 $a+d$ 是 4，5，6，9 四个数字之一。为方便计，设 $x^2=1001(a+d)+20(10b+c)$，$x\in N$。

若 $a+d=4$，则 x^2 为偶数，且 $\left(\frac{x}{2}\right)^2=1001+5(10b+c)$，它的个位数为 1 或 6，∴ $\frac{x}{2}$ 的个位数是 1、4、6 或 9。注意到 $1001\leqslant\left(\frac{x}{2}\right)^2<1501$，$32\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 38$，就知 $\frac{x}{2}=34$ 或 $\frac{x}{2}=36$，$x^2=68^2=4624=1313+3311=2312+2312$，或 $x^2=72^2=5184=1593+3591=2592+2592$。

∴ 这时适合题意的数对有 4 对。

若 $a+d=5$，则 $x^2=5\times1001+20(10b+c)=5(1001+40b+4c)$，于是 $1001+40b+4c$ 是 5 的倍数，从而 $1+4c$ 是 5 的倍数，∴ $c=1$ 或 6。如果 $c=1$，那么 $x^2=5^2(201+8b)$，$201+8b$ 是奇数的完全平方数，且 $201\leqslant\left(\frac{x}{5}\right)^2\leqslant 273$，$15\leqslant\frac{x}{5}\leqslant 16$。∵ $\frac{x}{5}$ 为奇数，∴ $\frac{x}{5}=15$，

$$x^2=75^2=5625=1314+4311=2313+3312,$$

即这时适合题意的数对有 2 对。如果 $c=6$，那么 $x^2=5^2(205+8b)$。因为 $205+8b$ 除以 8 余 5，不可能是完全平方数，即这种情况不可能。

若 $a+d=6$，则 $x^2=2[3003+10(10b+c)]$，即 x^2 是偶数，但不是 4 的倍数，故这种情况也不可能。

若 $a+d=9$，则 $x^2=9009+20(10b+c)$，$9009\leqslant x^2<10000$，$95\leqslant x\leqslant 99$。但 x^2 的个位数为 9，x 的个位数是 3 或 7。∴ $x=97$，$x^2=97^2=9409=1208+8201=2207+7202=3206+6203=4205+5204$，这时适合题意的数对有 4 对。

综上所述，适合题意的数对共 10 对。

(9) ［解］(B) 整数组 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 构成从 1，2，…，6 中取四个元素的一个重复组合；反之亦然。故数组共有 $H_6^4=C_9^4=126$ 组。

(10) ［解］(C)

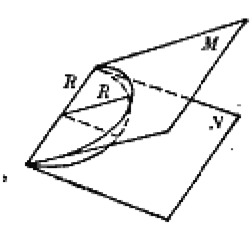
∵ $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=[i(\cos\theta-i\sin\theta)]^n=i^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)=i^{n-1}(\sin n\theta+i\cos n\theta)$，

又已知 $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta$，

∴ $i^{n-1}(\sin n\theta+i\cos n\theta)=\sin n\theta+i\cos n\theta$。

∵ $\sin n\theta+i\cos n\theta\neq0$，∴ $i^{n-1}=1$，$n=4k-1$。故这种 n 的个数是

$$\left[\frac{1985-1}{4}\right]+1=497.$$



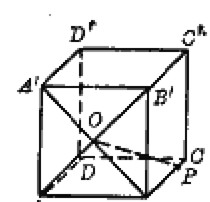
2. (1) ［解］ 设平面 M 上的圆的半径为 R，如图。对平面 N 上的椭圆而言，长半轴 $a=R$，短半轴 $b=R|\cos\theta|$，

∴ $c^2=a^2-b^2=R^2(1-\cos^2\theta)=R^2\sin^2\theta$，$c=R\sin\theta$，$e=\frac{c}{a}=\sin\theta$。

(2) ［解］ ∵ $|z|=1$，∴ 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$。于是

$$\begin{aligned}|z^2-z+2|^2&=|\cos2\theta+i\sin2\theta-\cos\theta-i\sin\theta+2|^2\\&=(\cos2\theta-\cos\theta+2)^2+(\sin2\theta-\sin\theta)^2\\&=6-2(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)+4\cos2\theta-4\cos\theta\\&=6-6\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)=8\left(\cos\theta-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{8},\end{aligned}$$

∴ 当 $\cos\theta=\frac{3}{8}$ 时，$|z^2-z+2|_{min}=\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$。



(3) ［解］ 如图，设 $A'B$ 与 AB' 相交于 O，则 O 为正方形 $ABB'A'$ 的中心，且

$LO\perp AB'$。∵ $PB\perp$平面 $ABB'A'$， ∴ $PO\perp AB'$，即 $S=PO$。注意到 $PB=vt-1$，就有

$$S^2=PB^2+BO^2=(vt-1)^2+\frac{1}{2}.$$

(4)〔解〕 正确的命题号码为(C)，(D)。

(5)〔解〕 $$\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8+1\right]^n=\left\{\left[-i\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right]^8+1\right\}^n$$
$$=[(-i\omega)^8+1]^n=(\omega^2+1)^n=(-\omega)^n,$$

∴ 当 n 取 1，2，…，100 时可得 6 个不同数值。

〔说明〕 本题的 100 可改成任意大于等于 6 的自然数；这 6 个不同的数值是 $-\omega$，ω^2，-1，ω，$-\omega^2$，1。

(6)〔解〕 由条件可得

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\frac{3}{2},$$
$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{4}=0,$$

即
$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0.$$

∵ $1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant 0$， ∴ 上式成立的充要条件是

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

∵ $0<\alpha$，$\beta<\pi$， ∴ $0\leqslant\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>0$。于是由上式推知 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$，$2\alpha+\beta=\pi$。

(7)〔分析〕 因 $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}$，故只要求出 $\sin x\sin y$ 和 $\cos x\cos y$ 的值，本题即可得解。

〔解〕
$$\sin x+\sin y=\sqrt{2} \quad ①$$
$$\cos x+\cos y=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ②$$

$①^2+②^2$，得

$$2+2\sin x\sin y+2\cos x\cos y=2+\frac{4}{3},$$
$$\therefore\ \cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{2}{3} \quad ③$$

即
$$\cos(x-y)=\frac{2}{3}. \quad ④$$

$②^2-①^2$，得

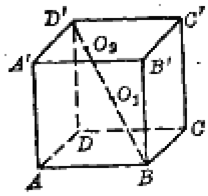
$$\cos 2x+\cos 2y+2(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=-\frac{2}{3},$$
$$2\cos(x+y)\cos(x-y)+2\cos(x+y)=-\frac{2}{3}.$$

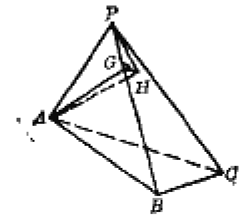
以④代入得 $\cos(x+y)=-\frac{1}{5}$，即

$$\cos x\cos y-\sin x\sin y=-\frac{1}{5}. \quad ⑤$$

由③、⑤解得 $\cos x\cos y=\frac{7}{30}$， $\sin x\sin y=\frac{13}{30}$， ∴ $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{13}{7}$。

(8)〔解〕 如图（见下页）。设球 O_2 的半径为 r，且设球 O_2 是在角 D' 内作的，则 O_1，O_2 在对角线 BD' 上。且 $D'O_2=\sqrt{3}r$，$O_1O_2=r+\frac{1}{2}$ 于是有 $2\left[\sqrt{3}r+\left(r+\frac{1}{2}\right)\right]=BD'=\sqrt{3}$，$r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$，$4\pi r^2=(7-4\sqrt{3})\pi$。这就是球 O_2 的面积。





(9)［解］ 如图，设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，$S_{\triangle PAB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle PBC}=2$，$S_{\triangle PCA}=1$，则

$$\begin{cases}\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=2,\\ \frac{1}{2}ca\sin 60^\circ=1,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}ab=2,\\ bc=\frac{8}{\sqrt{3}},\\ ca=\frac{4}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

由此解得 $a=1$，$b=2$，$c=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

自 A 作平面 PBC 的垂线 AH，因 $\angle APB=\angle APC=60^\circ$，故垂足 H 在 $\angle BPC$ 的平分线上，即 $\angle BPH=30^\circ$。在平面 PBC 内，自 H 作 $HG\perp PB$，连 AG，则 $AG\perp PB$。于是

$$PG=a\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\qquad PH=\frac{PG}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$AH=\sqrt{a^2-PH^2}=\sqrt{\frac{2}{3}},\qquad V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\cdot AH\cdot S_{\triangle PBC}=\frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

(10)［解法一］ $x=1$ 时，$y+z=14$，它有 13 组正整数解；$x=2$ 时 $y+z=13$，它有 12 组正整数解；…$x=13$ 时，$y+z=2$，它只有 1 组正整数解。故原方程有 $1+2+\cdots+13=91$ 组正整数解。

［解法二］ 设 $x-1=x'$，$y-1=y'$，$z-1=z'$，则 $x'+y'+z'=12$。本题即求上面不定方程的非负整数解的组数。

这相当于求从 a_1，a_2，a_3 三个不同元素中取 12 个元素的重复组合数，这类组合中，a_1 取 x' 个，a_2 取 y' 个，a_3 取 z' 个。故解的组数是 $H_3^{12}=C_{14}^{12}=C_{14}^{2}=91$。

［说明］ 由解二可知：$x_1+x_2+\cdots+x_k=n(n\in N)$ 的非负整数解的组数是 $H_k^n=C_{n+k-1}^n$。

第 二 试

1.［解］ 设抛物线 C_1 的焦点参数为 p，则 $\frac{p}{2}=\left(\sqrt{2}-\frac{3}{4}\right)-(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{4}$，$p=\frac{1}{2}$。∴ 抛物线 C_1 的方程为 $x=(y-1)^2+\sqrt{2}-1$，即 $y^2-2y-x+\sqrt{2}=0$。

设 C_1，C_2 在交点 (x_0, y_0) 处的切线互相垂直。因 C_1 的切线为

$$y_0y-(y+y_0)-\frac{1}{2}(x+x_0)+\sqrt{2}=0,$$

斜率 $k_1=\frac{1}{2y_0-2}$；C_2 的切线为

$$y_0y-\frac{1}{2}a(y+y_0)+\frac{1}{2}(x+x_0)+2b=0,$$

斜率 $k_2=-\frac{1}{2y_0-a}$，故有 $\frac{1}{2y_0-2}\cdot\left(-\frac{1}{2y_0-a}\right)=-1$，即

$$4y_0^2-2(a+2)y_0+2a-1=0. \quad ①$$

又 (x_0, y_0) 既在 C_1 上 又在 C_2 上，故

$$y_0^2-2y_0-x_0+\sqrt{2}=0,\quad y_0^2-ay_0+x_0+2b=0.$$

两式相加,得

$$2y_0^2-(2+a)y_0+2b+\sqrt{2}=0. \qquad ②$$

①－②×2,消去 y_0,得

$$2a-1-4b-2\sqrt{2}=0,\quad b=\frac{2a-1-2\sqrt{2}}{4}.$$

代入抛物线 C_2 的方程,得

$$y^2-ay+x+\frac{2a-1-2\sqrt{2}}{2}=0,\text{ 即 } 2y^2+2x-1-2\sqrt{2}-2a(y-1)=0.$$

∴ $\begin{cases}2y^2+2x-1-2\sqrt{2}=0\\ y-1=0\end{cases}$ 的解 $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2},1\right)$即是定点坐标。

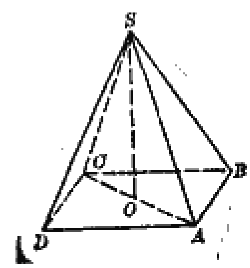
2.〔解〕 先选1至 $p-1$ 号队员的坐位,并让他们坐好,有 $C_n^{p-1}\cdot(p-1)!$ 种坐法;然后让 p 号队员坐在最右边的空位上,最后让 $p+1$ 至 n 号队员在剩下的坐位上,有 $(n-p)!$ 种坐法。故满足条件的坐法有 $C_n^{p-1}\cdot(p-1)!\cdot(n-p)!=\frac{n!}{n-p+1}$ 种。

〔说明〕 如果用其他方法讨论,可能得出下面两种等价形式:

$$P_{n-1}^{n-1}+P_{p-1}^1P_{n-2}^{n-2}+\cdots+P_{p-1}^{p-1}P_{n-p}^{n-p}$$

或 $$C_{p-1}^0(n-p)!(p-1)!+C_{p-1}^1(n-p+1)!(p-2)!+\cdots+C_{p-1}^{p-1}(n-1)!.$$

3.〔解〕 设 $S—ABCD$ 为已知的正四棱锥,O 为底面中心。不妨设 π 过 AC,且设 A、B、C、D、O、S 在 π 上的投影分别为 A'、B'、C'、D'、O'、S',正四棱锥 P 在 π 上的投影图形为 P'。∵ 平面 SBD ⊥AC, ∴ B', O', D', S' 四点必落在 $A'C'$(即 AC) 的中垂线上,且 $A'B'C'D'$ 为菱形,如图2。$O'B'=OB\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$。记 $h'=O'S'$,则 $h'=h\sin\alpha$。



(图 1)

i) 当 $h'\leqslant O'B'$ 时,S' 落在 $A'B'C'D'$ 菱形内或边界上,

$$\therefore\ S_{P'}=S_{A'B'C'D'}=S_{ABCD}\cos\alpha=4\cos\alpha.$$

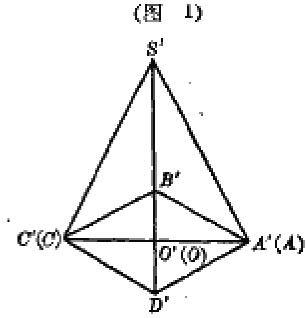
当 $\alpha=0$ 时,$(S_{P'})_{\max}=4$。

ii) 当 $h'>O'B'$ 时,

$$S_{P'}=S_{\triangle A'D'C'}+S_{\triangle A'C'S'}=2\cos\alpha+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot h\sin\alpha$$

$$=\sqrt{2h^2+4}\sin(\alpha+\varphi),$$

其中 $$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{h}.$$



(图 2)

∵ 由$\sqrt{2h^2+4}>4$ 解得 $h>\sqrt{6}$, ∴ $h>\sqrt{6}$时,取 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$,$(S_{P'})_{\max}=\sqrt{2h^2+4}$;否则

$$S_{P'}=\sqrt{2h^2+4}\sin(\alpha+\varphi)\leqslant\sqrt{2h^2+4}\leqslant4.$$

综上所述,

$$(S_{P'})_{\max}=\begin{cases}4, & \text{若 } h\leqslant\sqrt{6}\ (\text{此时取 }\alpha=0);\\ \sqrt{2h^2+4}, & \text{若 } h>\sqrt{6}\left(\text{此时取 }\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi\right).\end{cases}$$

4.〔解〕 设 A、B、C、D 为满足条件的四点,能覆盖它们的圆半径为 R。

i) 若 A、B、C、D 四点中有一点,设为 D,在 $\triangle ABC$ 的内部或边界上。

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则有一角,设为$\angle A\geqslant60^\circ$,

$$2R=\frac{a}{\sin A}\leqslant\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

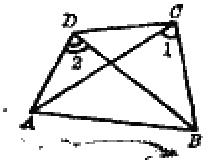
即 $R\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$。特别地，当 $AB=BC=CA=1$ 时，$R=\frac{1}{\sqrt{3}}$，比它小的圆不可能覆盖此四点。

若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形或直角三角形，则以最长边为直径的圆能覆盖此四点，故 $R\leqslant\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$。

ii) 若 A、B、C、D 形成凸四边形，

若有一对对角，设为 $\angle A$、$\angle C$ 均 $\geqslant 90°$，则以 BD 为直径的圆即能覆盖此四点，

$$\therefore\quad R\leqslant\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



若上述情况不发生，四边形 $ABCD$ 四个内角中必有一个，例如设为 $\angle D>90°$，则 $\angle B<90°$。又 $\angle A$、$\angle C$ 中至少有一个，不妨设 $\angle A<90°$，如图。

考察 $\angle 1$，$\angle 2$，并不妨设 $\angle 2>\angle 1$。若 $\angle 2>\angle 1\geqslant 90°$，以 AB 为直径作圆可覆盖此四点，故 $R\leqslant\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$；若 $\angle 2>\angle 1$，$\angle 1<90°$，D 必在锐角 $\triangle ABC$ 外接圆内或圆周上，该圆半径 $R\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$。

综上所述，覆盖平面上两两距离不超过 1 的任意四点的圆的最小半径 $R=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

1986 年上海市中学生数学竞赛试题

第 一 试

1．选择题(本题满分 60 分，共 15 个小题)

(1) 三角形的三条边长均为正整数，其中有一条边长为 4，但它不是最短的边，这样不同的三角形共有

(A) 6 个 (B) 7 个 (C) 8 个 (D) 9 个。

(2) 若 α、$\beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，则必有

(A) $\cos(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$ (B) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

(C) $\cos(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$ (D) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$。

(3) 在轴截面顶角为直角的圆锥内，作一内接圆柱，若这圆柱的全面积等于这圆锥的侧面积，则这圆锥顶点至圆柱上底面的距离等于圆锥母线长的

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$。

(4) 点 $P(0,2)$ 关于直线 $x+2y-1=0$ 的对称点坐标是

(A) $(-2,0)$ (B) $(-1,0)$ (C) $(0,-1)$ (D) $\left(-\frac{6}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$。

(5) 2^{1000} 除以 13 的余数是

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 7。

(6) 已知函数 $y=\lg(1-mx^2)$ 对任意实数 x 都有意义，又直线 $y=x\cos(\operatorname{arc\,tg} m)+n$ $(m、n\in R)$ 的倾斜角为 θ，则 θ 的值等于

(A) $-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ (B) $\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$

(C) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ (D) $\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$。

(7) 已知三个实数 a，$b=a^a$，$c=a^{a^a}$，其中 $0.9<a<1$，这三个数的大小关系是

(A) $a<c<b$ (B) $a<b<c$ (D) $b<a<c$ (D) $c<a<b$。

(8) 设 a 为正数，而 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,|x|+2|y|\leqslant a\}$，是 XOY 平面内的点集，则 $A\subseteq B$ 的一个充分必要条件是

(A) $a=2$ (B) $a\geqslant3$ (C) $a\geqslant\sqrt{3}$ (D) $a\geqslant\sqrt{5}$。

(9) 若极坐标方程 $\rho=\dfrac{\sec^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+1}$ 是一圆锥曲线，则它的焦点到其相应准线的距离是

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 2。

(10) 今有一角币 1 张，二角币 1 张，五角币 1 张，一元币 4 张，五元币 2 张，用这些纸币

任意付款，则可付出不同数额的款子共有

(A) 30 种　(B) 29 种　(C) 120 种　(D) 119 种。

(11) 若曲线 $ax^2+bxy+cy^2=1$ $(b^2-4ac\neq0)$ 和三直线 $x=1$, $y=1$, $y=x+1$ 分别相切，则

(A) $a=b=c$　(B) $a=b=-c$

(C) $a=-b=c$　(D) $-a=b=c$.

(12) 已知 $Z=(\arccos x-\arcsin x)+i(\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} x)$，当 Z 是复平面上第三象限内的点时，实数 x 的取值范围是

(A) $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$

(C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0$　(D) $-1<x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(13) 一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2^{-5}$，它的前 11 项的几何平均数为 2^5，若在前 11 项中抽去一项后的几何平均数为 2^4，则抽去的项是

(A) 第 8 项　(B) 第 9 项　(C) 第 10 项　(D) 第 11 项。

(14) $e^{\sin^2 x}\pi^{\cos^2 x}$ 和 $e+\pi$ 两者间大小关系是(其中 e 是自然对数的底，π 是圆周率)

(A) $e^{\sin^2 x}\pi^{\cos^2 x}>e+\pi$　(B) $e^{\sin^2 x}\pi^{\cos^2 x}=e+\pi$

(C) $e^{\sin^2 x}\pi^{\cos^2 x}<e+\pi$　(D) 不能确定两者的大小关系。

(15) A、B、C、D 是空间不共面的四点，它们到平面 α 的距离之比依次为 1:1:1:2，则满足条件的平面 α 的个数是

(A) 1　(B) 4　(C) 7　(D) 8.

2. 填空题(本题满分 60 分，共 10 个小题，每小题 6 分)

(1) 已知 A、B、M、N 为非空集，$A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$ 的真子集$\}$，$N=\{B$ 的真子集$\}$，那么 $M\cap N=$ ________.

(2) 已知函数 $y=\sqrt{(x^2-6x+9)(-x^2+6x-5)}$，那么它的值域是 ________.

(3) 抛物线 $y=\frac{1}{3}a^3x^2+\frac{1}{2}a^2x-2a$ (a 为非零常数)的顶点在曲线 ________ 上.

(4) 6 人划船，左右各 3 人，其中 2 人只能划左桨，1 人只能划右桨。这样他们的不同坐法共有 ________ 种。

(5) 已知方程 $ax^2-4xy+\sqrt{3}y^2+3\sqrt{3}x-3y=0$ 表示两条直线，则实数 $a=$ ________.

(6) 空间四边形的两组对边的平方和相等，那么它的两条对角线所成的角是____度。

(7) 用正方形完全盖住边长分别为 3 cm、4 cm、5 cm 的一个三角形，那么这个正方形的最小边长是____cm。

(8) 已知 $\log_a x=\sec 20°$，$\log_b x=\sec 60°$，$\log_c x=\sec 100°$，$\log_d x=\sec 140°$，那么 $\log_{abcd}x$ 的值是 ________.

(9) 制作一个底圆直径为 4 cm 的圆柱形容器，要内装直径为 2 cm 的钢珠 26 只，那么这容器的高至少是 ________ cm(精确到 0.1 cm)。

(10) 已知 $f(x)=ax+b(a\neq0)$，$g(x)=\frac{2}{cx+d}(c\neq0)$，且 $f[g(x)]=\frac{x}{x-2}$，$g[f(x)]$

$=\dfrac{1}{2x-1}$，则 $abcd=$ ______。

第 二 试

1．(本题 20 分) 设 $a>1$，a，θ 均为实数，试求当 θ 变化时，函数 $\dfrac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ 的最小值。

2．(本题 20 分) 已知六边形的各边长不超过 1，试证此六边形至少有一条主对角线不超过 2。

(主对角线是指：六边形中某一顶点与相隔二个顶点的第三顶点的联线。如六边形 $ABCDEF$ 中，AD 是主对角线，AC 就不是主对角线)。

3．(本题 20 分) 证明：一个奇自然数 c 为合数，它的充分必要条件是存在自然数 $a\leqslant\dfrac{c}{3}-1$，使 $(2a-1)^2+8c$ 为平方数。

4．(本题 30 分) 函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，但不包括数 0；对定义域中的任意数 x，在定义域中存在 x_1，x_2，使 $x=x_1-x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$；且满足以下三条件：

(1) x_1、x_2 是 $f(x)$ 定义域中的数，$f(x_1)\neq f(x_2)$ 或 $0<|x_1-x_2|<2a$，则

$$f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)},$$

(2) $f(a)=1$ (a 是一个正常数)，

(3) 当 $0<x<2a$ 时，$f(x)>0$。

试证：(1) $f(x)$ 是奇函数；

(2) $f(x)$ 是周期函数，并求出其周期；

(3) $f(x)$ 在 $(0, 4a)$ 内为减函数。

5．(本题 30 分) 已知圆柱底面半径为 r，高为 h，过上底一点作一截面，它与底面夹角为 α，其中 $0°<\alpha<90°$，试求将夹在截面与底面之间的立体侧面展开成平面图形后，此时所得截口曲线的方程。

解 答

第 一 试

1．(1) (C) 另两边记为 a、b，且 a 为最短边，则有

$$\begin{cases}a+b>4,\\ a+4>b,\\ b\geqslant4>a\text{ 或 }4>b\geqslant a,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}a+b>4>b-a\geqslant0,\\ a<4.\end{cases}$$

若 $b-a=0$，则 $a+b=2a>4$，$2<a<4$。∴ $a=b=3$。

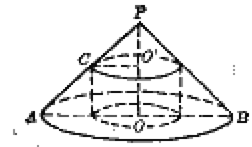
若 $b-a=1$，则 $a+b=2a+1>4$，$\dfrac{3}{2}<a<4$。∴ $a=2$，$b=3$；或 $a=3$，$b=4$。

若 $b-a=2$，则 $a+b=2a+2>4$，$1<a<4$。∴ $a=2$，$b=4$；或 $a=3$，$b=5$。

若 $b-a=3$，则 $a+b=2a+3>4$，$\dfrac{1}{2}<a<4$。∴ $a=1$，$b=4$；或 $a=2$，$b=5$；或 $a=3$，$b=6$。

综上所述，不等式组有 8 组不同的正整数解，故适合条件的不同三角形也有 8 个。

(2) (*B*) ∵ $0<\alpha<\alpha+\beta<\pi$， ∴ $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha<\cos\alpha+\cos\beta$。



(3) (*A*) 如图，设 $\triangle PAB$ 为已知圆锥的轴截面，O 为底面中心。∵ $PA=PB=l$，$\angle APB=90°$， ∴ $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，且 $OP=OA=\frac{\sqrt{2}}{2}l$。

设 O' 为内接圆柱上底面中心，并设 $O'P=O'C=h$，由条件可得

$$2\pi h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l-h\right)+2\pi h^2=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l\cdot l,\quad \therefore\ h=\frac{l}{2}.$$

(4) (*D*) 设所求的对称点为 $P'(x_0,y_0)$，则 PP' 的中点 $\left(\frac{x_0}{2},\ \frac{2+y_0}{2}\right)$ 应在直线 $x+2y-1=0$ 上，

$$\therefore\ \frac{x_0}{2}+(2+y_0)-1=0,\quad 即\ x_0+2y_0+2=0. \qquad ①$$

又 ∵ PP' 垂直于直线 $x+2y-1=0$，

$$\therefore\ \frac{y_0-2}{x_0}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\quad 即\ y_0=2x_0+2. \qquad ②$$

由①、②可解得 $x_0=-\frac{6}{5}$，$y_0=-\frac{2}{5}$。

(5) (*C*) ∵ $2^4\equiv 3\pmod{13}$，$3^3\equiv 1\pmod{13}$，

$$\therefore\ 2^{12}=(2^4)^3\equiv 3^3\equiv 1\pmod{13}.$$

∵ $1000=12\times 83+4$， ∴ $2^{1000}\equiv 2^4\equiv 3\pmod{13}$。

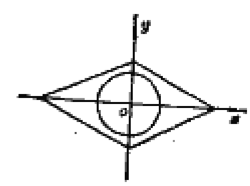
(6) (*C*) ∵ $y=\lg(1-mx^2)$ 对一切 $x\in R$ 都有意义， ∴ $1-mx^2>0$ 恒成立，即 $m\leqslant 0$。

于是，$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} m\leqslant 0$。

$$\operatorname{tg}\theta=\cos(\operatorname{arc\,tg} m)=\frac{1}{\sqrt{1+[\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} m)]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$\therefore\ \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

(7) (*A*) ∵ $0<a<1$， ∴ $1>a^a>a$，$a<a^{a^a}<a^a$，即 $a<c<b$。



(8) (*D*) 如图，A 表示单位圆域，B 表示顶点为 $(\pm a,0)$，$\left(0,\ \pm\frac{a}{2}\right)$ 的菱形区域。∴ $A\subseteq B$ 的一个充要条件是原点到直线 $x+2y=a$ 的距离不小于1，

即
$$\frac{a}{\sqrt{5}}\geqslant 1,\quad a\geqslant\sqrt{5}.$$

(9) (*D*) ∵ $\dfrac{\sec^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+1}=\dfrac{\sec^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\sec^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+1}=\dfrac{1}{\frac{1-\cos\theta}{2}+1}=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cos\theta}$， ∴ 极坐标方程就是 $\rho=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cos\theta}$。对照二次曲线统一的极坐标方程知 $e=\frac{1}{3}$，$ep=\frac{2}{3}$。∴ $p=2$。

(10) (*D*) 为了付某数额的款子，一角币可以不取或取1张2种取种；二角币、五角币也各有2种取法；一元币可以不取，或取1张、取2张、取3张、取4张5种取法；同理五元币有3种取法。由乘法原理并除去都不取的情况即得不同数额的款子种数：$2\times 2\times 2\times 5\times 3-1=119$。

(11) (*C*) ∵ 曲线 $ax^2+bxy+cy^2=1$ 与直线 $x=1$ 相切， ∴ 将 $x=1$ 代入二次曲线方程得到的二次方程 $cy^2+by+(a-1)=0$ 有重根，$\Delta=b^2-4c(a-1)=0$。

同理，由曲线与 $y=1$ 相切得 $b^2-4a(c-1)=0$。

$$\therefore\ b^2-4c(a-1)=b^2-4a(c-1),\quad c=a,$$

且
$$b^2-4a(a-1)=0. \qquad (*)$$

∵ 曲线与直线 $y=x+1$ 相切， ∴ 将 $y=x+1$ 及 $c=a$ 代入曲线方程并整理得到的二次方程

$$(2a+b)x^2+(2a+b)x+(a-1)=0$$

有重根，

$$\triangle=(2a+b)(-2a+b+4)=0.$$

∵ $2a+b\neq 0$， ∴ $-2a+b+4=0$, $b=2a-4$. 将它代入(*)式，解得

$$a=\frac{4}{3},\quad b=-\frac{4}{3}.$$

$$\therefore\quad a=-b=c.$$

(12) (*B*) 题目的条件等价于

$$\begin{cases}\text{arc}\cos x-\text{arc}\sin x<0,\\ \text{arc tg}\,x-\text{arc ctg}\,x<0.\end{cases}$$

∵ $\text{arc}\sin x+\text{arc}\cos x=\frac{\pi}{2}\quad(|x|\leqslant 1)$， $\text{arc tg}\,x+\text{arc ctg}\,x=\frac{\pi}{2}$，

$$\therefore\begin{cases}\frac{\pi}{2}-2\,\text{arc}\sin x<0,\\ 2\,\text{arc tg}\,x-\frac{\pi}{2}<0,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}\text{arc}\sin x>\frac{\pi}{4},\\ \text{arc tg}\,x<\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1.$$

(13) (*D*) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，被抽去的是第 k 项，则由题设得

$$(a_1a_2\cdots a_{11})^{\frac{1}{11}}=[(2^{-5})^{11}\cdot q^{1+2+\cdots+10}]^{\frac{1}{11}}=2^5,$$

$$\left(\frac{a_1a_2\cdots a_{11}}{a_k}\right)^{\frac{1}{10}}=2^4.$$

由第一式得 $a_1a_2\cdots a_{11}=2^{55}$ 及 $q=2^2$；由第二式得

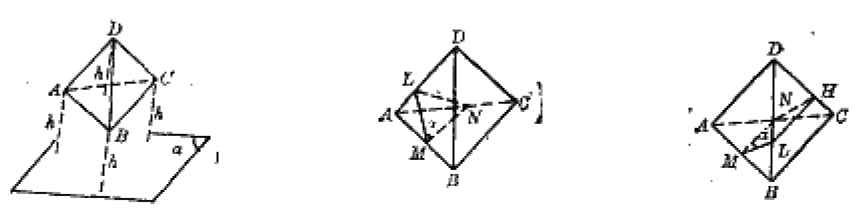
$$a_k=\frac{2^{55}}{2^{40}}=2^{15}=2^{-5}\times(2^2)^{10}=a_1q^{10},$$

∴ $k=11$.

(14) (*C*) $e^{\sin^2x}\cdot\pi^{\cos^2x}<\pi^{\sin^2x}\cdot\pi^{\cos^2x}=\pi<e+\pi$.

[说明] 本题可推广成下面的形式：设 x、y、α、β 均为正数，且 $\alpha+\beta=1$，则 $x^\alpha y^\beta<x+y$.

(15) (*D*) A、B、C、D 四点在 α 的一侧，这种平面 α 只有 1 个，如图 1. 设 D 到平面 ABC 的距离为 h，则不通过 D，且与平面 ABC 距离也是 h 的平面即是 α.



(图 1)　　(图 2)　　(图 3)

[第 1(15) 题]

A、B、C、D 中有三个点在 α 同侧，第四点在另一侧的这种平面 α 有 4 个. 图 2 中画了一个 B、C、D在 α 同侧，A 在另一侧的平面 α. 其中 M、N 分别是 AB、AC 的中点，而 $DL:LA=2:1$.

A、B、C、D 在 α 两侧各有二点的 α 有 3 个. 图 3 中画了一个 A、D 与 B、C 分别在 α 两侧的平面 α. 其中 M、N 分别是 AB、AC 的中点，而 $DL:LB=DH:HC=2:1$.

故满足条件的平面 α 有 8 个.

2. (1) ∵ $A\cap B=\varnothing$， ∴ A 的非空真子集必不是 B 的子集，反之亦然；只有$\varnothing$既是 A 的真子集又是 B 的真子集. 因此，

$$M\cap N=\{\varnothing\}.$$

(2) 令 $x^2-6x+9=t$，则 $-x^2+6x-5=-t+4$，且 $t=(x-3)^2\geqslant 0$.

$$y=\sqrt{t(-t+4)}=\sqrt{-t^2+4t}=\sqrt{-(t-2)^2+4}.$$

由 $t\geqslant 0$ 及 $-(t-2)^2+4\geqslant 0$ 得 $0\leqslant t\leqslant 4$，而 $0\leqslant -(t-2)^2+4\leqslant 4$， ∴ $0\leqslant y\leqslant 2$.

(3) $y=\frac{1}{3}a^3\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2-\frac{35}{16}a$， ∴ 抛物线顶点坐标是

$$x=-\frac{3}{4a},\qquad y=-\frac{35}{16}a.$$

相乘即得顶点的轨迹方程：

$$xy=\frac{105}{64}.$$

(4) 在能划左桨又能划右桨的3人中选1人去划左桨，剩下2人划右桨．因划左(右)桨的3人可以任意排列，故不同坐法的种数是 $C_3^1\times(3!)^2=108$.

(5) 方程 $ax^2-4xy+\sqrt{3}y^2+3\sqrt{3}x-3y=0$ 表示两条直线意即等式左边的二次式可以分解为二个一次式的积.

∵ $\sqrt{3}y^2-3y=(\sqrt{3}y-3)y$， ∴ 可设

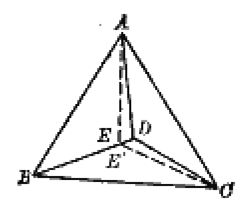
$$ax^2-4xy+\sqrt{3}y^2+3\sqrt{3}x-3y=(\sqrt{3}y+lx-3)(y+mx)$$
$$=lmx^2+(\sqrt{3}m+l)xy+\sqrt{3}y^2-3mx-3y,$$

比较两边对应项的系数，得

$$a=lm,\quad -4=\sqrt{3}m+l,\quad 3\sqrt{3}=-3m.$$
$$\therefore\quad m=-\sqrt{3},\quad l=-1,\quad a=\sqrt{3}.$$

(6) 如图，设 $ABCD$ 为空间四边形，且 $AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$，即

$$AB^2-AD^2=CB^2-CD^2.$$



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 内用余弦定理，

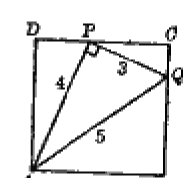
$$AB^2-AD^2=BD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB,$$
$$CB^2-CD^2=BD^2-2BD\cdot CD\cos\angle CDB.$$

由此得

$$AD\cos\angle ADB=CD\cos\angle CDB.$$

这就是说，若在平面 ABD 和 CBD 内，分别自 A、C 作 BD 的垂线 AE、CE'，则垂足 E、E' 在 D 点的同侧(或同时与 D 重合)，且 $DE=DE'$， ∴ E 与 E' 重合.

于是 $BD\perp$ 平面 ACE，$BD\perp AC$，即 BD 与 AC 成 $90°$ 角.



(7) 以 3 cm，4 cm，5 cm 为边长的 $\triangle APQ$ 必是直角三角形．设 $\angle P$ 为直角.

为了使覆盖 $\triangle APQ$ 的正方形边长最小，可使 A 落在正方形的一个顶点上，而另外二个顶点 P、Q 分别落在边 DC、CB 上(如图).

设正方形的边长为 a cm，则 $BQ=\sqrt{25-a^2}$ cm，$DP=\sqrt{16-a^2}$ cm．由 $CP^2+CQ^2=PQ^2$ 得

$$(a-\sqrt{16-a^2})^2+(a-\sqrt{25-a^2})^2=9,$$

整理得

$$\sqrt{25-a^2}+\sqrt{16-a^2}=\frac{16}{a}. \qquad ①$$

两边同乘 $\sqrt{25-a^2}-\sqrt{16-a^2}$ 得

$$9=\frac{16}{a}(\sqrt{25-a^2}-\sqrt{16-a^2}),$$

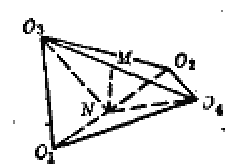
即

$$\sqrt{25-a^2}-\sqrt{16-a^2}=\frac{9a}{16}. \qquad ②$$

①＋②得
$$2\sqrt{25-a^2}=\frac{16}{a}+\frac{9a}{16}.$$
两边平方，并整理可得
$$\frac{1105}{16^2}a^4-82a^2+16^2=0.$$
$$\therefore\quad a^2=\frac{256}{17}\quad 或\quad a^2=\frac{256}{65}.$$
$\because\ 6=S_{\triangle APQ}\leqslant\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{a^2}{2}$，$a^2\geqslant12$，$\therefore\ a^2=\frac{256}{65}$ 不合条件，应舍弃．于是 $a=\frac{16}{\sqrt{17}}=\frac{16\sqrt{17}}{17}$，即正方形的最小边长为 $\frac{16\sqrt{17}}{17}$ cm．

(8) $(\log_{abcd}x)^{-1}=\log_x(abcd)=\log_x a+\log_x b+\log_x c+\log_x d$
$$=(\sec 20^\circ)^{-1}+(\sec 60^\circ)^{-1}+(\sec 100^\circ)^{-1}+(\sec 140^\circ)^{-1}$$
$$=\cos 20^\circ+\cos 60^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$$
$$=\cos 60^\circ+(\cos 20^\circ+\cos 100^\circ)-\cos 40^\circ$$
$$=\frac{1}{2}+2\cos 60^\circ\cos 40^\circ-\cos 40^\circ=\frac{1}{2}.$$
$$\therefore\quad \log_{abcd}x=2.$$

(9) 底圆直径为 4 cm 的圆柱形容器内装直径为 2 cm 的钢珠，每层只能装 2 只．为了容器高最小，必须使相邻两层钢珠的联心线互相垂直，此时四个钢珠的球心构成棱长为 2 cm 的正四面体的四个顶点，其对棱(即两层钢珠的联心线)的中点联线 MN 即是它们的公垂线(如图)．故对棱的距离



$$d=\sqrt{O_3N^2-O_3M^2}=\sqrt{\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}\,(\text{cm}).$$

26 个钢珠分放 13 层，故高至少是 $2+12\sqrt{2}\approx19.0$(cm)．

(10) $\because\ f[g(x)]=a\cdot\frac{2}{cx+d}+b=\frac{bcx+bd+2a}{cx+d}=\frac{x}{x-2}$，

即
$$bcx^2+(bd+2a-2bc)x-2(bd+2a)=cx^2+dx.$$
$$\therefore\quad\begin{cases}bc=c,\\ bd+2a-2bc=d,\\ bd+2a=0.\end{cases}$$
$\because\ c\neq0$，$\therefore$ 由第一式得 $b=1$，且后面二式可简化成

$a=c$，　①　　　$d+2a=0$．　②

同理由 $g[f(x)]=\frac{2}{c(ax+b)+d}=\frac{2}{acx+c+d}=\frac{1}{2x-1}$ 得

$ac=4$，　③　　　$c+d=-2$．　④

将①代入②，并与④联立，解得 $c=a=2$，$d=-4$．$\because\ a=c=2$ 恰适合③，$\therefore\ abcd=2\times1\times2\times(-4)=-16$．

第 二 试

1．［解法一］ 原式 $=\frac{\sin^2\theta+(4+a)\sin\theta+4a}{\sin\theta+1}=\sin\theta+(3+a)+\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}$
$$=(\sin\theta+1)+\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}+a+2,$$
令 $\sin\theta+1=x$，并设 $k=(\sin\theta+1)+\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}$，则 $0<x\leqslant2$，且 $k=x+\frac{3(a-1)}{x}$，整理得
$$x^2-kx+3(a-1)=0. \qquad ①$$

记 $f(x)=x^2-kx+3(a-1)$，则 $y=f(x)$ 的图象是张口向上的抛物线，其对称轴为 $x=\frac{k}{2}$，且有 $f(0)=3(a-1)>0$（$\because$ $a>1$）。因此方程①有一根在 $(0,2]$ 内的充要条件是

$$\begin{cases}0<\frac{k}{2}\leqslant 2,\\ \triangle=k^2-12(a-1)\geqslant 0;\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\frac{k}{2}>2,\\ f(2)=-2k+3a+1\leqslant 0.\end{cases}$$

即 $2\sqrt{3(a-1)}\leqslant k\leqslant 4$；或 $k>4$ 且 $k\geqslant\frac{3a+1}{2}$。

由 $2\sqrt{3(a-1)}\leqslant 4$ 解得 $1<a\leqslant\frac{7}{3}$；而当 $a>\frac{7}{3}$ 时，$\frac{3a+1}{2}>4$，故当 $1<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时，$k_{\min}=2\sqrt{3(a-1)}$；当 $a>\frac{7}{3}$ 时，$k_{\min}=\frac{3a+1}{2}$。

于是，当 $1<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时，原式的最小值是 $2\sqrt{3(a-1)}+a+2$；当 $a>\frac{7}{3}$ 时，原式的最小值是

$$\frac{3a+1}{2}+a+2=\frac{5a+5}{2}.$$

［解法二］ 原式 $=(\sin\theta+1)+\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}+a+2$。

令 $\sin\theta+1=x$，则 $0<x\leqslant 2$。设

$$k(x)=x+\frac{3(a-1)}{x},$$

并研究它在 $(0,+\infty)$ 内的增减性。为此，取 $0<x_1<x_2<+\infty$，

$$k(x_2)-k(x_1)=x_2-x_1+\frac{3(a-1)}{x_2}-\frac{3(a-1)}{x_1}=(x_2-x_1)\left[1-\frac{3(a-1)}{x_2x_1}\right]$$

$$\begin{cases}<0, & 若\ 0<x_1<x_2\leqslant\sqrt{3(a-1)};\\ >0, & 若\ \sqrt{3(a-1)}\leqslant x_1<x_2<+\infty.\end{cases}$$

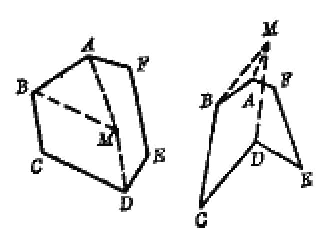
$\therefore$ $k(x)$ 在 $(0,\sqrt{3(a-1)}]$ 内为减函数；在 $[\sqrt{3(a-1)},+\infty)$ 内为增函数。

$\therefore$ 当 $\sqrt{3(a-1)}\in(0,2]$，即 $1<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时，$k(x)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值为 $k(\sqrt{3(a-1)})=2\sqrt{3(a-1)}$；当 $\sqrt{3(a-1)}>2$，即 $a>\frac{7}{3}$ 时，$k(x)$ 在 $(0,2]$ 上最小值是

$$k(2)=2+\frac{3(a-1)}{2}=\frac{3a+1}{2}.$$

以下同［解法一］。

2. 设 $ABCDEF$ 是适合题意的六边形。AB、CD、EF 三边所在直线，至少有两条，它们的夹角不超过 $60°$（如两线平行，认为夹角为 $0°$）。不妨设 AB 和 CD 的夹角不超过 $60°$。



过 B 作 $BM\mathrel{\underline{\parallel}}CD$（如图。其中左图是凸六边形的情形，而右图是凹六边形的情形），则 $DM\mathrel{\underline{\parallel}}BC$，且 $\angle ABM=AB$ 与 CD 的夹角 $\leqslant 60°$。

$$\begin{aligned}AM^2&=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos\angle ABM\\&\leqslant AB^2+BM^2-AB\cdot BM.\end{aligned}$$

由对称性，不妨设 $BM\geqslant AB$。注意到 $BM=CD\leqslant 1$，就有

$$AB^2+BM^2-AB\cdot BM=BM^2+AB(AB-BM)\leqslant BM^2\leqslant 1.$$

$$\therefore\quad AM^2\leqslant 1,\quad AM\leqslant 1.$$

于是
$$AD\leqslant AM+MD=AM+BC\leqslant 2.$$

3. 充分性，设 $(2a-1)^2+8c=(2t+1)^2$ 为完全平方数。

$$\because\quad a\leqslant\frac{c}{3}-1,\quad c\geqslant 3(a+1),$$

$$\therefore\quad (2a-1)^2+8c\geqslant 4a^2-4a+1+24(a+1)=4a^2+20a+25=(2a+5)^2.$$

$$2t+1\geqslant 2a+5,\quad t\geqslant a+2,$$

且

$$8c=(2t+1)^2-(2a-1)^2=4(t+a)(t-a+1),$$

$$2c=(t+a)(t-a+1).$$

右边两个因数中总有一个是偶数，且 $t+a\geqslant 4$，$t-a+1\geqslant 3$，故 c 可分解为两个大于1的因数的乘积，从而 c 为合数。

必要性。设 c 为奇合数，则 c 可分解为两个大于1的奇数之积。将较小的记为 $2k-1$，较大的记为 q，即

$$c=(2k-1)q,\quad k\geqslant 2,\ q\geqslant 2k-1.$$

令 $a=q-k+1$，则

$$a=\frac{c}{2k-1}-k+1\leqslant\frac{c}{2k-1}-1\leqslant\frac{c}{3}-1,$$

且

$$\begin{aligned}(2a-1)^2+8c&=(2q-2k+1)^2+8(2k-1)q\\&=[2q-(2k-1)]^2+4\cdot 2q(2k-1)=[2q+(2k-1)]^2,\end{aligned}$$

$\therefore$ $(2a-1)^2+8c$ 是完全平方数。

4．(1) 对定义域中的 x，按题设在定义域中存在 x_1,x_2，使 $x=x_1-x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，故

$$f(x)=f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}=-\frac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=-f(x_2-x_1)=-f(-x).$$

$\therefore$ $f(x)$为奇函数。

(2) $\because$ $f(a)=1$，$f(x)$为奇函数，$\therefore$ $f(-a)=-1$。于是

$$f(-2a)=f[(-a)-a]=\frac{f(-a)f(a)+1}{f(a)-f(-a)}=\frac{-1+1}{1-(-1)}=0.$$

若 $f(x)\neq 0$，则

$$f(x+2a)=f[x-(-2a)]=\frac{f(x)f(-2a)+1}{f(-2a)-f(x)}=\frac{1}{-f(x)}\ (\neq 0),$$

$$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=\frac{1}{-f(x+2a)}=\frac{1}{-\dfrac{1}{-f(x)}}=f(x);$$

若 $f(x)=0$，则

$$f(x+a)=f[x-(-a)]=\frac{f(x)f(-a)+1}{f(-a)-f(x)}=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$f(x+3a)=f[(x+a)+2a]=\frac{1}{-f(x+a)}=1,$$

$$f(x+4a)=f[(x+3a)-(-a)]=\frac{f(x+3a)f(-a)+1}{f(-a)-f(x+3a)}=0,$$

仍有 $f(x+4a)=f(x)$。

$\therefore$ $f(x)$为周期函数，$4a$ 是它的一个周期。

(3) 先证在$(0,2a]$内 $f(x)$为减函数。事实上，设 $0<x_1<x_2\leqslant 2a$，则 $0<x_2-x_1<2a$。由条件(1)、(3)知

$$f(x_1)>0,\ f(x_2)>0,\quad \frac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=f(x_2-x_1)>0.$$

$$\therefore\quad f(x_1)-f(x_2)>0,\quad 即\quad f(x_1)>f(x_2).$$

这就是所要证明的。

当 $2a<x_1<x_2<4a$ 时，$0<x_1-2a<x_2-2a<2a$，$f(x_1-2a)>f(x_2-2a)>0$。因为在(2)的证明中得知，$f(x-2a)\neq 0$ 时，

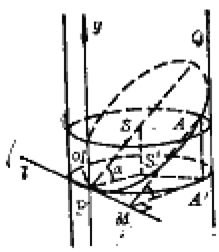
$$f(x)=f[(x-2a)+2a]=-\frac{1}{f(x-2a)},$$

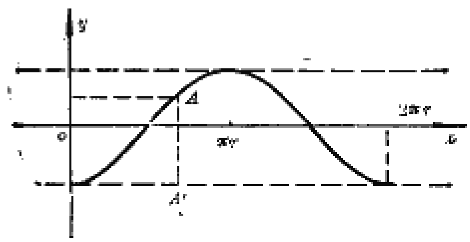
故

$$f(x_1)-f(x_2)=-\frac{1}{f(x_1-2a)}+\frac{1}{f(x_2-2a)}>0.$$

∴ 在$(2a,\ 4a)$内$f(x)$也是减函数。于是,命题得证。

5. 先设圆柱的高充分大，使截面成一个完整的椭圆，设截面与圆柱的轴相交于点S，截口的最低点和最高点分别是P、Q，并不妨设下底恰过点P，平面α与下底面的交线为l。设沿过点P的母线剪开，将侧面展成平面图，并取这条母线为y轴，过S且与底面平行的截面的截口展开所得的直线为x轴建立直角坐标系，如图。





设A为截口上任意一点，它在平面图中的坐标为(x,y)，A在下底面上的投影为A'，过A'作l的垂线$A'M$，连AM，则$\angle AMA'=\alpha$。记$\angle PS'A'=t$，则$0\leqslant t<2\pi$，$x=\widehat{PA'}=rt$，

$$y=A'A-S'S=MA'\operatorname{tg}\alpha-r\operatorname{tg}\alpha=\left[r\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+r\right]\operatorname{tg}\alpha-r\operatorname{tg}\alpha$$

$$=r\operatorname{tg}\alpha\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=r\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{x}{r}-\frac{\pi}{2}\right).$$

∴ 截口曲线的方程是

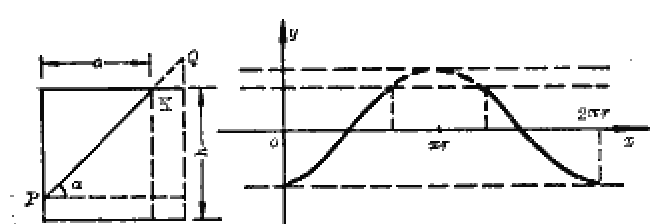
$$y=r\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{x}{r}-\frac{\pi}{2}\right),\quad 0\leqslant x<2\pi r.$$

由正弦曲线的性质知,P、Q的横坐标分别是0，πr，故实际上PQ即是截面椭圆的长轴。

现在考虑一般情况．P、Q意义及剪开的方法同前，设截面过上底面的定点K，不妨设K在长轴PQ上,K到过P点的母线距离为a，$0<a\leqslant 2r$。

(1) 若$0<\alpha\leqslant\operatorname{arc\,tg}\dfrac{h}{a}$,则截面的最低点$P$在圆柱的侧面上,如图.此时立体侧面展开成平面图形后，截口曲线方程是

$$y=r\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{x}{r}-\frac{\pi}{2}\right),$$



其中参数t满足

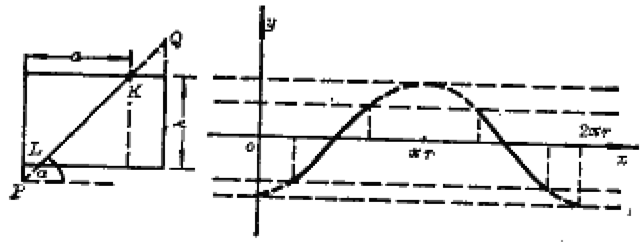
$$0\leqslant r\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+r\leqslant a,$$

即 $$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)\quad 或\quad \frac{3\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)\leqslant t<2\pi,$$

亦即 $$0\leqslant x\leqslant r\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)\right]\quad 或\quad r\left[\frac{3\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)\right]\leqslant x<2\pi r.$$

(2) 若 $\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{a}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则截面将与下底面相交，$PQ$ 与下底面交点记为 L，L 到过 P 点母线的距离为 $a-h\operatorname{ctg}\alpha$，如图。此时立体侧面展成平面图形后，截口曲线方程为

$$y=r\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{x}{r}-\frac{\pi}{2}\right),$$



其中参数 t 满足

$$a-h\operatorname{ctg}\alpha\leqslant r\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+r\leqslant a,$$

即
$$\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{a-h\operatorname{ctg}\alpha}{r}-1\right)\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)$$

或
$$\frac{3\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{a-h\operatorname{ctg}\alpha}{r}-1\right),$$

亦即
$$r\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{a-h\operatorname{ctg}\alpha}{r}-1\right)\right]\leqslant x\leqslant r\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)\right]$$

或
$$r\left[\frac{3\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{a}{r}-1\right)\right]\leqslant x\leqslant r\left[\frac{3\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{a-h\operatorname{ctg}\alpha}{r}-1\right)\right].$$

全国各省、市、自治区中学生联合数学竞赛概况

全国中学生联合数学竞赛是由中国数学会普及工作委员会举办的一项群众性中学生课外活动．其目的是提高中学生学习数学的兴趣；推动数学课外活动的开展；促进中学数学教学质量的提高；发现和培养人才，并为参加国际数学奥林匹克作准备．为了更切合实际地开展这项工作和更好地发挥省、市、自治区数学会的潜力，在吸取了以前组织举办工作的经验和教训的基础上，从1981年起实行省、市、自治区联合数学竞赛，由省、市、自治区数学会轮流主办，已经主办过的单位，1981年是北京市数学会，1982年是上海市数学会，1983年是安徽省数学会，1984年是贵州省数学会，1985年是天津市数学会，1986年由四川省数学会，1987年将由河南省数学会主办．

每年全国有近三万名高中学生参加竞赛，每年竞赛组织工作由中国数学会委托主办单位统筹计划，统一命题，统一试卷，统一竞赛时间，统一评分标准．对考场设置、监考、阅卷等工作，则由各省市自治区负责组织，并申报本地区科协和教育等有关部门协助支持和配合．阅卷后，将分数最高的前50名的名单及试卷报送主办单位的命题和评奖小组复查，以选定竞赛的优胜者，并由中国数学会和有关部门给予奖励．中国数学会普及工作委员会作为联络和资助单位．

高中数学竞赛主要由在校的高二、高三学生报名参加，少数低年级学生也可破格参加．竞赛不搞层层选拔，不组织代表队，不搞突击性集训．竞赛的知识内容不超越中学数学教学大纲，也不超越教学进度，以配合学校的正常教学．

竞赛工作的关键在于命题．通过命题来体现竞赛的目的要求，也在不同层次上体现数学教学的加强基础、提高能力、发展智力的要求，每次竞赛中都有一定数量的题目体现对"双基"的要求，以检查学生的基础知识和分析与解决问题的能力．对提高中学数学教学质量是有帮助的．例如1982年竞赛试题选择题的第6小题：

已知x_1、x_2是方程

$$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0 \quad (k\text{为实数})$$

的两个实根，则$x_1^2+x_2^2$的最大值是

(A) 19　(B)　18　(C) $5\frac{5}{9}$　(D) 不存在．

许多学生的答案为(A)，即以为$x_1^2+x_2^2$的最大值是19．他们只利用韦达定理：

$$x_1+x_2=k-2;\quad x_1x_2=k^2+3k+5.$$

由　$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-(k+5)^2+19\leqslant 19,$

得到：当$k=-5$时取到等号，而没有考虑到x_1、x_2是实系数二次方程的实数根，还要根据判别式

$$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)=-3k^2-16k-16\geqslant 0,$$

即$-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$．于是，$k$只能在区间$\left[-4,\ -\frac{4}{3}\right]$中取值，正确的答案应该是当$k=-4$

时，$x_1^2+x_2^2$ 有最大值 18。

又如，1983 年试题第一题的第 4 小题：

已知 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2=1\}$，那么使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是

(A) $a\geqslant\frac{5}{4}$ (B) $a=\frac{5}{4}$ (C) $a\geqslant1$ (D) $0<a<1$。

同学们大都知道，使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是圆 $x^2+(y-a)^2=1$ 在抛物线 $y=x^2$ 的开口内，而不超越它，但是，怎样从此求出关于 a 的条件呢？不少同学考虑先求出它们相切时 a 的值。于是，由方程组

$$\begin{cases}y=x^2\\x^2+(y-a)^2=1\end{cases}$$

得 $y+(y-a)^2=1$，即 $y^2-(2a-1)y+a^2-1=0$，欲其有重根，令

$$\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-1)=0,$$

得

$$a=\frac{5}{4}.$$

但是他们没有注意到，当 $a=\pm1$ 时，显然，圆 $x^2+(y-a)^2=1$ 与抛物线 $y=x^2$ 是相切于原点的。为什么没有在解题过程中反映出来呢？这不是说明解法不完备，理由不充足吗？

其中利用判别式 Δ 为零的方法来求，是值得探讨的。

我们从方程组

$$\begin{cases}y=x^2\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}$$

得到 $y+(y-1)^2=1$，即 $y^2-y=0$，从而得到 $y_1=0$ 与 $y_2=1$，这里判别式不为零，没有重根。它们是当 $y=0$ 时，得到 x 的重根 $x^2=0$，才相切于原点的。

其实，对于直线与二次曲线相切来说，判别式为零是充要条件。因为它们的方程组消元之后得到的方程若是二次的，则是常规的二次方程，而对于两条二次曲线来说，它们的方程组消元之后，得到的实质上不是二次方程，而是二次的复合。利用判别式为零的条件是充分的，但未必是必要的。

前后这两个例子，都抓住了在应用二次式的判别式这个条件时同学容易犯的错误。一个是没有用上判别式非负的条件，而扩大了范围，另一个是利用判别式为零而缩小范围，这就反映出在概念掌握上的不严谨，考虑得不周全的问题。在这之后，不少的刊物和复习资料，都注意了这些方面的问题，这也许是数学竞赛对数学教学的一个促进吧。

这个题目的解法，除了解答中提供的一种外，还可以这样考虑：

欲圆 $x^2+(y-a)^2=1$ 在抛物线 $y=x^2$ 的开口内，即圆 $y=a\pm\sqrt{1-x^2}$ 在抛物线 $y=x^2$ 的上方。由此得到充要条件

$$\begin{cases}a\pm\sqrt{1-x^2}\geqslant x^2\\x^2\leqslant1\leqslant a\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a-\sqrt{1-x^2}\geqslant x^2\\x^2\leqslant1\leqslant a\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\leqslant a-x^2\\x^2\leqslant1\leqslant a\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}1-x^2\leqslant a^2-2ax^2+x^4\\x^2\leqslant1\leqslant a\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^4-(2a-1)x^2+a^2-1\geqslant0\\x^2\leqslant1\leqslant a\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\left(x^2-\frac{2a-1}{2}\right)^2+\frac{4a-5}{4}\geqslant0\\x^2\leqslant1\leqslant a.\end{cases}$$

易知，当 $a\geqslant\frac{5}{4}$ 时，它是成立的。又若 $1\leqslant a<\frac{5}{4}$，则

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{2a-1}{2}<\frac{3}{4},$$

此时，当 $x^2=\frac{2a-1}{2}$ 时，它是不成立的，因此，所求的充要条件为 $a\geqslant\frac{5}{4}$。

有的试题虽然所用到的知识都是基本的，但是对运用知识的能力却有一定的要求，例如1983年竞赛的第五题：

函数 $F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关，当 A、B 为何值时，M 为最小。

此题看来有点难度，然而若先从几何直观入手，悟出解题方法，然后加以论证，那就变难为易了。

很明显，$F(x)=|\sin2x+\cos2x+Ax+B|=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$，它是两个函数：$f_1(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 与 $f_2(x)=Ax+B$ 的和的绝对值。所以，考察函数 $F(x)$ 当 $x\in\left[0,\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 时的最大值 M 的最小值，可以看作在已知函数 $f_1(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上，怎样加上一条直线 $f_2(x)=Ax+B$（其中 A、B 为参数），能使

$$f_1(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

图象纵坐标的绝对值的最大值减小或至少不增大。因为，显见当 $A=B=0$ 时

$$F(x)=|f_1(x)|\leqslant\sqrt{2}.$$

∵ 当 $x\in\left[0,\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 时，有 $f_1\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，$f_1\left(\frac{5\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}$，$f_1\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，于是

当 $A>0$ 时，$f_2(x)$ 为增函数。若

$$f_2\left(\frac{5\pi}{8}\right)\geqslant0,$$

则

$$f_2\left(\frac{9\pi}{8}\right)>0,$$

此时，
$$F\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+f_2\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right|>\sqrt{2};$$

若 $f_2\left(\frac{5\pi}{8}\right)<0$，则

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+f_2\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right|>\sqrt{2}.$$

当 $A<0$ 时，$f_2(x)$ 为减函数。若 $f_2\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$，则

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+f_2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|>\sqrt{2};$$

若 $f_2\left(\frac{\pi}{8}\right)\leqslant0$，则 $f_2\left(\frac{5\pi}{8}\right)<0$，此时，

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+f_2\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right|>\sqrt{2}.$$

又当 $A=0$ 而 $B\neq0$ 时，$f_1\left(\frac{\pi}{8}\right)$、$f_1\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ 中有一与 B 同号，

$$\therefore\quad \max\left(F\left(\frac{\pi}{8}\right), F\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)>\sqrt{2}.$$

因此，当 $A=B=0$ 时，M 为最小，其值为 $\sqrt{2}$。

解题的关键在于分析，从分析中找出解题的思路。学习数学的一个环节是通过解题来初步地培养分析问题和解决问题的能力，举反例也是说理论证的一种强有力的工具，例如1984年竞赛第二试第一大题的第3小题：下列命题是否正确，若正确，则给予证明，否则举出反例。

设 A、B 是坐标平面上的两个点集，$C_r=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$。若对任何 $r\geqslant0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$。

这个命题"一般"想来，似乎是能成立的。但是一定成立吗？是否有两个"特殊"的点集，使它不成立呢？能不能找到这样的两个点集 A 与 B，以及点 a，使 $a\in A$，且 $a\notin B$。$\because C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，若 $a\in A$ 而 $a\notin C_r$，则必有 $a\in B$，这样的 a 不是我们所要找的。于是，所要找的 a，必须是属于 $C_r\cap A$ 且不属于 $C_r\cap B$。并对任何 $r\geqslant0$，都是这样。而当 $r=0$ 时，$C_r\cap A=\{(0, 0)\}$。因此，能够充当"反面角色"的只有原点 $(0, 0)$。下面举出反例：

取点集 $A=\{(0, 0)\}$，$B=\varnothing$。显然，对于任何 $r\geqslant0$，满足 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$ 而 $A\nsubseteq B$。其实，只要取 A 为含点 $(0, 0)$ 的任何点集，B 为 A 去掉点 $(0, 0)$ 的点集，所得的结论是一样的。

实践证明，省市自治区联合数学竞赛，作为课外活动是很有成效的。它提高了中学生学习数学的兴趣，激发了学习热情，推动了数学小组、数学讲座和数学小论文习作等课外活动的开展，也发现和培养了一批人才，为高等学校数学、物理和计算机科学等系科录取优秀学生奠定了基础和提供了线索依据。

由于省市区竞赛有一部分试题是配合课堂教学的内容的，中学师生普遍认为，省市区竞赛对数学教学质量的提高是起了很好的作用。当然，没有课堂教学的扎实基础，课外活动也就成了无源之水，无本之木，展不开提不高。课外活动应是课堂教学的延续和补充，也是学校贯彻因材施教的一个重要组成部分。根据科技发展和现代化建设的需要，我们要进一步做好因材施教和智力开发工作，以适应三个面向的需要。

1981年二十五省、市、自治区中学生联合数学竞赛试题

1. 选择题(本题满分35分。每一小题答对者得5分,答错者得 -2 分,不答者得0分。)

(1) 条件甲:两个三角形的面积和二条边对应相等。

条件乙:两个三角形全等。

(A) 甲是乙的充分必要条件 (B) 甲是乙的必要条件 (C) 甲是乙的充分条件

(D) 甲不是乙的必要条件,也不是充分条件。

(2) 条件甲:$\sqrt{1+\sin\theta}=a$。

条件乙:$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$。

(A) 甲是乙的充分必要条件 (B) 甲是乙的必要条件 (C) 甲是乙的充分条件

(D) 甲不是乙的必要条件,也不是充分条件。

(3) 设 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}(k=0、\pm1、\pm2、\cdots\cdots)$,

$$T=\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

(A) T 取负值 (B) T 取非负值 (C) T 取正值 (D) T 取值可正可负。

(4) 下面四个图形中,哪一个面积大?

(A) $\triangle ABC$: $\angle A=60°$, $\angle B=45°$, $AC=\sqrt{2}$

(B) 梯形:两条对角线长度分别为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 夹角为 $75°$

(C) 圆:半径为1

(D) 正方形:对角线的长度是2.5。

(5) 给出长方体 $ABCD-A'B'C'D'$,下列十二条直线:AB', BA', CD', DC', AD', DA', BC', CB', AC, BD, $A'C'$, $B'D'$,中有多少对异面直线?

(A) 30对 (B) 60对 (C) 24对 (D) 48对

(6) 在座标平面上有两个区域 M 和 N。M 是由 $y\geqslant0$、$y\leqslant x$ 和 $y\leqslant2-x$ 这三个不等式确定的。N 是随 t 变化的区域,它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 所确定的,t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant1$。设 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)$,则 $f(t)$ 为

(A) $-t^2+t+\frac{1}{2}$ (B) $-2t^2+2t$ (C) $1-\frac{1}{2}t^2$ (D) $\frac{1}{2}(t-2)^2$。

(7) 对方程 $x|x|+px+q=0$ 进行讨论,下面的结论中,哪一个是错误的?

(A) 至多有三个实根

(B) 至少有一个实根

(C) 仅当 $p^2-4q\geqslant0$ 时才有实根

(D) 当 $p<0$ 和 $q>0$ 时,有三个实根。

2. (本题15分)下列表中的对数值有两个是错误的,请予纠正。

x	0.021	0.27	1.5	2.8	3	5
$\lg x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$	$2a-b$	$a+c$
x	6	7	8	9	14	
$\lg x$	$1+a-b-c$	$2(b+c)$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-a+2b$	

3. (本题15分)在圆O内,弦CD平行于弦EF,且与直径AB交成45°角,若CD与EF分别交直径AB于P和Q,且圆O的半径长为1。求证:

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2.$$

4. (本题15分) 组装甲、乙、丙三种产品,需用A、B、C三种零件。每件甲需用A、B各2个;每件乙需用B、C各1个;每件丙需用2个A和1个C。用库存的A、B、C三种零件,如组装成P件甲产品、q件乙产品和r件丙产品,则剩下2个A和1个B,但C恰好用完。试证:无论怎样产品改变甲、乙、丙的件数,也不能把库存的A、B、C三种零件都恰好用完。

5. (本题20分) 一张台球桌形状是正六边形$ABCDEF$。一个球从AB的中点P击出,击中BC边上的某点Q,并且依次碰击CD、DE、EF、FA各边,最后击中AB边上的某一点。设$\angle BPQ=\theta$,求θ的取值范围。

提示:利用入射角等于反射角的原理。

解　　答

1. 选择题

(1) [解](B) 若两三角形全等,则其边对应相等,面积也相等。但若两边对应相等,其夹角互补,则亦有面积相等。其实,由面积相等和两边对应相等,根据面积公式$\frac{1}{2}ab\sin C$只能推得夹角的正弦相等,因此夹角可能相等也可能互补,两三角形未必全等,故答案为(B)。

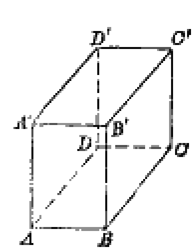
(2) [解](D) 条件甲即$\sqrt{1+\sin\theta}=\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|\geqslant 0$,而当$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$为第三或四象限角时,条件乙$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}<0$,此时,甲乙两式不相等。

(3) [解](C) $T=\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha+1)}{\operatorname{ctg}\alpha(\sin\alpha+1)}=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha+1}>0$,

其中$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

(4) [解](C) A. $S_{\triangle ABC}=\dfrac{b^2\sin A\cdot\sin C}{2\sin B}=\dfrac{2\sin 60°\cdot\sin 75°}{2\sin 45°}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$。 B. 若l_1、l_2为对角线长,φ为对角线的夹角,则

$$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}l_1\cdot l_2\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\sin 75°=\frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$



C. $S_{圆}=\pi R^2=\pi$.

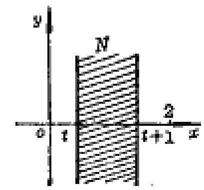
D. $S_{正方形}=3.125$. $\because$ $\pi>3.125>\frac{3+\sqrt{3}}{4}$, $\therefore$ 圆的面积最大。

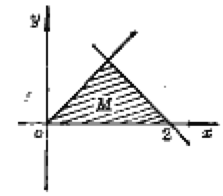
(5) [解](A) AB'、BA'、CD'、DC'、AD'、DA'、BC'、CB'、AC、BD、$A'C'$、$B'D'$为长方体$ABCD-A'B'C'D'$各侧面上的对角线。由图可见:

与AB'相交的对角线AC、AD'、$B'D'$、$B'C$、$A'B$;

与 AB' 平行的对角线 DC'。

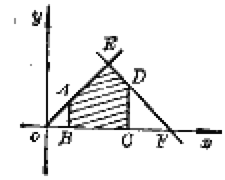
∴ 与 AB' 异面的对角线共有5条。长方体各侧面的12条对角线，∴ 互为异面直线的共有 $\frac{1}{2}\times 5\times 12$(条)。





(6)〔解〕(A) 如图:区域 N $t\leqslant x\leqslant t+1$, $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是坐标平面内的带状区域;区域 M $y\geqslant 0$, $y\leqslant x$ 和 $y\leqslant 2-x$ 是坐标平面内的三角形区域。M和N的公共区域面积可看作 $S_{\triangle OEF}-S_{\triangle OAB}-S_{\triangle DCF}$

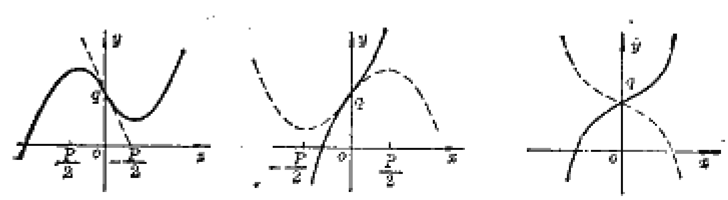
$$\therefore\quad f(t)=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(1-t)^2=-t^2+t+\frac{1}{2}\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$



(7)〔解〕(C)、(D) $f(x)=\begin{cases}x^2+px+q & x\geqslant 0,\\ -x^2+px+q & x<0.\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4} & x\geqslant 0,\\ -\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q+p^2}{4} & x<0.\end{cases}$$

由此可得p取不同值时，函数的大致图象：



$(p<0)$　　$(p>0)$　　$(p=0)$

其中 q 的变化，仅决定函数图象在坐标平面上、下平移。

从上面图象可见方程 $f(x)=0$ 至多有三个实根，至少有一个实根。于是仅当 $p^2-4q\geqslant 0$ 时才有实根的结论不正确，由 $p<0$, $q>0$ 的图象可见(D)也不成立。

2.〔解〕 先考虑表中 x 的取值：

$0.021=3\times 7\times 10^{-3}$; $0.27=3^3\times 10^{-2}$; $1.5=3\times 2^{-1}$; $2.8=2^2\times 7\times 10^{-1}$; 3;

$5=2^{-1}\times 10$; $6=2\times 3$; 7; $8=2^3$; $9=3^2$; $14=2\times 7$。

其中 0.27、3、9 的对数仅与 lg 3 有关：

$\lg 0.27=3\lg 3-2=6a-3b-2$, ∴ 推得 $\lg 3=2a-b$; $\lg 3=2a-b$;

$\lg 9=2\lg 3=4a-2b$。 ∴ 推得 $\lg 3=2a-b$。

若上面三对数有一不正确，则三个数的对数值均错，与题设有两个错误矛盾。 ∴ 三个对数值均正确。

然后讨论仅与 lg 3、lg 2 有关的对数值，即真数分别为 1.5、5、6、8 的对数值：

$\lg 1.5=\lg 3-\lg 2=3a-b+c$, ∴ $\lg 2=-a-c$。

$\lg 5=1-\lg 2=a+c$, ∴ $\lg 2=1-a-c$。

$\lg 6=\lg 2+\lg 3=1+a-b-c$, ∴ $\lg 2=1-a-c$。

$\lg 8=3\lg 2=3-3a-3c$, ∴ $\lg 2=1-a-c$。

由上面讨论可见1.5的对数值表不正确。而其余三个数均正确，且由此作修正：

$$\lg 1.5=\lg 3-\lg 2=3a-b+c-1.$$

现在考察与 lg 2、lg 3、lg 7 有关的对数值，即真数分别为 0.021、2.8、7、14 的对数值：

$\lg 0.021=\lg 3+\lg 7-3=2a+b+c-3$, ∴ $\lg 7=2b+c$。

$\lg 2.8 = 2\cdot\lg 2 + \lg 7 - 1 = 1 - 2a + 2b - c$,　　$\therefore$ $\lg 7 = 2b + c$。

$\lg 7 = 2b + 2c$。

$\lg 14 = \lg 2 + \lg 7 = 1 - a + 2b$,　　$\therefore$ $\lg 7 = 2b + c$。

由上面讨论可见 7 的对数值表不正确．而其余三个数均正确，且作修正为表中 $\lg 7 = 2b + c$。

3.［证法一］ 作 $OM\perp CD$，连接 OC，则 $CM = MD$，$PM = MO$。

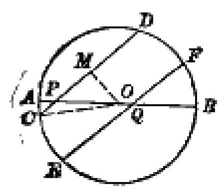
$$PC^2 + DP^2 = (CM - PM)^2 + (MD + PM)^2 = 2(CM^2 + MO^2) = 2\cdot OC^2 = 2.$$

同理
$$QE^2 + QF^2 = 2.$$

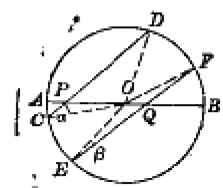
$$\because\ PC^2 + QE^2 \geqslant 2PC\cdot QE,\quad PD^2 + QF^2 \geqslant 2PD\cdot QF.$$

$$\therefore\ PC\cdot QE + PD\cdot QF \leqslant \frac{1}{2}(PC^2 + QE^2 + PD^2 + QF^2) = 2,$$

即 $PC\cdot QE + PD\cdot QF \leqslant 2$。仅当 $PC = QE$、$PD = QF$ 时等号成立．但是 $PC\perp\!\!\!\!=QE$、$PD\perp\!\!\!\!=QF$，$PCEQ$ 与 $PDFQ$ 都是平行四边形，即 $CE\parallel PQ\parallel DF$，且 $CDFE$ 是矩形，与 CD、EF 与 AB 交成 45° 角矛盾．等号不成立。



（图 1）



（图 2）

$\therefore$ $PC\cdot QE + PD\cdot QF < 2$。

［证法二］ 连接 OC、OD、OE、OF，令 $\angle DCO = \angle CDO = \alpha$，$\angle FEO = \angle EFO = \beta$．则

$$\angle CPO = \angle FQO = 135^\circ,\quad \angle OPD = \angle OQE = 45^\circ,$$

由正弦定理：

$$PC = \frac{OC\cdot\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin 135^\circ},\quad PC = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha).$$

$$PD = \frac{OD\cdot\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin 45^\circ},\quad PD = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha).$$

同理
$$EQ = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \beta),\quad QF = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \beta).$$

于是
$$\begin{aligned}PC\cdot QE + PD\cdot QF &= 2[\sin(45^\circ - \alpha)\cdot\sin(45^\circ + \beta) + \sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \beta)]\\ &= [\cos(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)] + [\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]\\ &= 2\cos(\alpha + \beta) \leqslant 2.\end{aligned}$$

$$\because\ \alpha + \beta \neq 180^\circ,\quad \therefore\ PC\cdot QE + PD\cdot QF < 2.$$

［证法三］ 连接 OC、OE，令 $\angle HOC = \alpha$，$\angle HOE = \beta$。

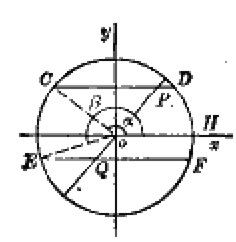
$C(\cos\alpha, \sin\alpha)$、$D(-\cos\alpha, \sin\alpha)$、$E(\cos\beta, \sin\beta)$、$F(-\cos\beta, \sin\beta)$。

于是 CD：$y = \sin\alpha$；EF：$y = \sin\beta$；PQ：$y = x$。

$\therefore$ $P(\sin\alpha, \sin\alpha)$、$Q(\sin\beta, \sin\beta)$、$PC = \cos\alpha - \sin\alpha$，

$PD = -\cos\alpha - \sin\alpha$，$QE = \cos\beta - \sin\beta$，$QF = -\cos\beta - \sin\beta$。

$\therefore$ $PC\cdot QE + PD\cdot QF = 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$



（图 3）

又 $\alpha \neq \beta$，

$\therefore$ $PC\cdot QE + PD\cdot QF < 2$。

4.［证明］ 由条件得仓库内所存零件分别是：

A 种零件：$2p + 2r + 2$（件），

B 种零件：$2p + q + 1$（件），

C 种零件：$q+r$(件)。

兹设：所改变的产品件数，甲种产品 m 件、乙种产品 n 件，丙种产品 l 件。

于是零件 A 需要：$2m+2l$(件)。

零件 B 需要：$2m+n$(件)。

零件 C 需要：$n+l$(件)。

若将仓库所存恰用完，则有：

$$2m+2l=2p+2r+2, \quad ①$$

$$2m+n=2p+q+1, \quad ②$$

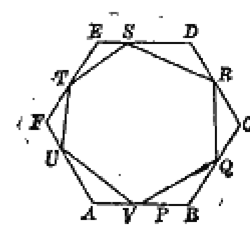
$$n+l=q+r. \quad ③$$

①式－②式：$$2l-n=2r-q+1,$$

再加(3)式：$$3l=3r+1, \quad l=r+\frac{1}{3}.$$

由此可见不论怎样改变各种产品件数，要使仓库存货用完，丙种产品不可能取整数，即不可能将库货三种零件都恰用完。

5〔解法一〕 如图，设小球各边的反射点依次为 P、Q、R、S、T、U、V。根据入射角等于反射角的原理 $\angle PQB=\angle RQC$、$\angle B=\angle C=120°$，



$\therefore$ $\triangle PQB \backsim \triangle RQC$，有 $\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}$。

同理推得 $$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CR}=\frac{DS}{DR}=\frac{ES}{ET}=\frac{FU}{FT}=\frac{AU}{AV}.$$

不失一般性，设正六边形的边长为 1，$PB=\frac{1}{2}$，$BQ=x$，则

$$CQ=1-x, \quad CR=\frac{1-x}{2x}, \quad DR=\frac{3x-1}{2x}, \quad DS=3x-1,$$

$$ES=2-3x, \quad ET=\frac{2-3x}{2x}, \quad FT=\frac{5x-2}{2x}, \quad FU=5x-2,$$

$$AU=3-5x, \quad AV=\frac{3-5x}{2x}.$$

因为 Q、R、S、T、U、V 各点均在正六边形的边上，所以

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ 0<\frac{1-x}{2x}<1, \\ 0<3x-1<1, \\ 0<\frac{2-3x}{2x}<1, \\ 0<5x-2<1, \\ 0<\frac{3-5x}{2x}<1. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} 0<x<1, \\ \frac{1}{3}<x<1, \\ \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}, \\ \frac{2}{5}<x<\frac{2}{3}, \\ \frac{2}{5}<x<\frac{3}{5}, \\ \frac{3}{7}<x<\frac{3}{5}. \end{cases}$$

解上面不等式组得

$$\frac{3}{7}<x<\frac{3}{5}.$$

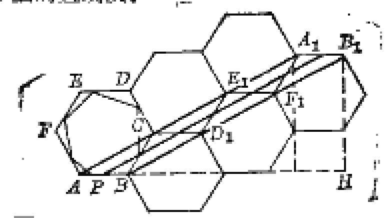
在 $\triangle PBQ$ 中，$BP=\frac{1}{2}$，$\angle PBQ=120°$，$\frac{3}{7}<BQ<\frac{3}{5}$，由余弦定理解得 PQ 的范围

$$\frac{\sqrt{127}}{14}<PQ<\frac{\sqrt{91}}{10},$$

由正弦定理即可得 $\angle QPB$ 的范围：

$$\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{127}}<\theta<\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$

〔解法二〕 将正六边形 $ABCDEF$（简称图 A_0）以 BC 为对称轴反射，得图 A_1；再将正六边形图 A_1 以 CD_1 为对称轴反射，得图 A_2；如图，顺次得 A_3、A_4、A_5 各正六边形。显然 B、D_1、F_1、B_1 以及 A、C、E_1、A_1 各点分别在一条直线上，且 ABB_1A_1 为平行四边形。又因为入射角等于反射角，所以从 AB 的中点 P 击出，依次碰到图 A_0 的各边反射，最后击中 AB 边上的一点，这种情况下球 P 所经过的折线轨迹，由对称性可得如图所形成的在平行四边形 ABB_1A_1 内始点在 P，终点在 A_1B_1 上的直线段。



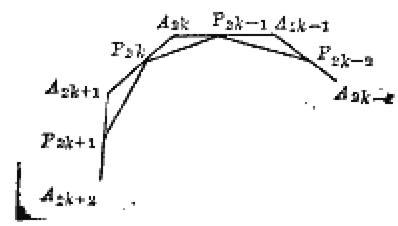
∴ $\angle BPQ$ 的范围：$\angle BPB_1<\angle BPQ<\angle BPA_1$。

由 $AB=1$，$BP=\dfrac{1}{2}$，$B_1H=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$BB_1=3\sqrt{3}$，$PH=5$，可以解得

$$\angle BPB_1=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{127}},\quad \angle BPA_1=\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}.$$

$$\therefore\quad \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{127}}<\theta<\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}.$$

注：若本题条件修改为一张台球桌形状是正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，一个球从 AB 的中点 P 击出，击中 A_2A_3 边上的点 P_2，并且依次碰击 A_3A_4、A_4A_5、……A_nA_1 各边，击中 A_iA_{i+1} 边的点为 P_i，而 P_{n+1} 击中 A_1A_2 边，设 $\angle A_2P_1P_2=\theta$，求 θ 的范围。



通过解正六边形的情况下不等式组的规律，我们可以估计：

我们可以得到 n 个不等式的组，第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个不等式表示 $P_{i+1}A_{i+1}$ 的长度范围。于是可以推得：

(1) 当 i 为奇数时，x 满足 $0<ix-\dfrac{1}{2}(i-1)<1$；

(2) 当 i 为偶数时，x 满足 $0<\dfrac{\frac{1}{2}i-(i-1)x}{2x}<1$。

下面对(1)用数学归纳法证明：

(i) 当 $i=1$ 时，(1)显然成立。

(ii) 若 $i=2k-1$ 时，有 $0<(2k-1)x-(k-1)<1$，

即
$$A_{2k}P_{2k}=(2k-1)x-(k-1).$$
$$\therefore\quad A_{2k+1}P_{2k}=1-A_{2k}P_{2k}=k-(2k-1)x.$$

由三角形相似有

$$\frac{A_2P_1}{A_2P_2}=\frac{A_3P_3}{A_3P_2}=\frac{A_4P_3}{A_4P_4}=\frac{A_5P_5}{A_5P_4}=\cdots=\frac{A_{2k}P_{2k-1}}{A_{2k}P_{2k}}=\frac{A_{2k+1}P_{2k+1}}{A_{2k+1}P_{2k}}=\cdots,$$

$$\therefore\quad \frac{A_{2k+1}P_{2k+1}}{A_{2k+1}P_{2k}}=\frac{\frac{1}{2}}{x},\quad A_{2k+1}P_{2k+1}=\frac{1}{2x}[k-(2k-1)x].$$

$$A_{2k+2}P_{2k+1}=1-A_{2k+1}P_{2k+1}=\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{k}{2x}.$$

又由
$$\frac{A_{2k+2}P_{2k+2}}{A_{2k+2}P_{2k+1}}=\frac{A_2P_2}{A_2P_1}=\frac{x}{\frac{1}{2}},$$

$$A_{2k+2}P_{2k+2}=2x\cdot\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{k}{2x}\right]=\left(k+\frac{1}{2}\right)2x-k.$$

可有 $0<A_{2k+2}P_{2k+2}<1$，从而得 $0<(2k+1)x-k<1$。

∴ 第 $2k+1$ 个不等式成立，结论(1)为真。同理亦可证(ii)。

由(1)可推得：

$$\frac{i-1}{2i}<x<\frac{1}{i}+\frac{i-1}{2i}\quad(i\text{ 为奇 }1\leqslant i\leqslant n).$$

由(2) $$\frac{i}{2i+2}<x<\frac{i}{2i-2}\quad(i\text{为偶},1<i\leqslant n)。$$

显然，随 i 增大，$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}$ 增大；$\frac{1}{i}+\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2i}+\frac{1}{2}$ 减小。随 i 增大，$\frac{i}{2i+2}=\frac{1}{2+\frac{2}{i}}$ 增大；$\frac{i}{2i-2}=\frac{1}{2-\frac{2}{i}}$ 减小。因此，不等式组的解实际上是最后一个不等式的解：

$$\frac{n-1}{2n}<x<\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2n}\quad\text{或}\quad\frac{n}{2n+2}<x<\frac{n}{2n-2}\ \text{的解。}$$

故 n 为奇： $$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n};$$

n 为偶： $$\frac{n}{2n+2}<x<\frac{n}{2n-2}。$$

∴ n 为奇数 $$\arcsin\frac{\sqrt{3}\,(n-1)}{2\sqrt{3n^2-3n+1}}<\theta<\arcsin\frac{\sqrt{3}\,(n+1)}{2\sqrt{3n^2+3n+1}};$$

n 为偶数 $$\arcsin\frac{\sqrt{3}\,n}{2\sqrt{3n^2+3n+1}}<\theta<\arcsin\frac{\sqrt{3}\,n}{2\sqrt{3n^2-3n+1}}。$$

此外，若将结论修改为 P 不是 AB 的中点，在 $BP=a$，$(0<a<1)$ 的地方将球击出，在正六边形的台球桌上，使球反射回 AB 边，则按解法一或二，即可得 θ 的范围为

$$\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+9a+27}}<\theta<\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+7a+19}}。$$

1982 年二十八省、市、自治区中学生联合数学竞赛试题

1. 选择题(本题 48 分。每一小题答对者得 6 分、答错者得 0 分,不答者得 1 分。)

(1) 如果凸 n 边形 $F(n\geqslant 4)$ 的所有对角线都相等,那么

(A) $F\in\{$四边形$\}$　(B) $F\in\{$五边形$\}$

(C) $F\in\{$四边形$\}\cup\{$五边形$\}$

(D) $F\in\{$边相等的多边形$\}\cup\{$内角相等的多边形$\}$。

(2) 极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-\cos\theta+\sin\theta}$ 所确定的曲线是

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 双曲线　(D) 抛物线。

(3) 如果 $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)]=0$,

那么

(A) $z<x<y$　(B) $x<y<z$　(C) $y<z<x$　(D) $z<y<x$。

(4) 由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成的图形的面积是

(A) 1　(B) 2　(C) π　(D) 4。

(5) 对任何 $\phi\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$都有

(A) $\sin\sin\phi<\cos\phi<\cos\cos\phi$　(B) $\sin\sin\phi>\cos\phi>\cos\cos\phi$

(C) $\sin\cos\phi>\cos\phi>\cos\sin\phi$　(D) $\sin\cos\phi<\cos\phi<\cos\sin\phi$。

(6) 已知 x_1, x_2 是方程

$$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0\quad (k\text{ 为实数})$$

的两个实数根,$x_1^2+x_2^2$ 的最大值是

(A) 19　(B) 18　(C) $5\dfrac{5}{9}$　(D) 不存在。

(7) 设 $M=\{(x,\ y)$: $|xy|=1,\ x>0\}$,

$N=\{(x,\ y)$: $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} y=\pi\}$。

那么

(A) $M\cup N=\{(x,\ y): |xy|=1\}$

(B) $M\cup N=M$　(C) $M\cup N=N$

(D) $M\cup N=\{(x,\ y)$: $|xy|=1$, 且 x, y 不同时为负数$\}$。

(8) 当 a、b 是两个不相等的正数时,下列三个代数式:

甲:$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$,　乙:$\left(\sqrt{ab}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$,

丙:$\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2}{a+b}\right)^2$

中间,值最大的一个

(A) 必定是甲　(B) 必定是乙　(C) 必定是丙

(D) 一般并不确定，而与 a、b 的取值有关。

2．(本题 16 分)已知四面体 $SABC$ 中，

$$\angle ASB=\frac{\pi}{2},\quad \angle ASC=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right),\quad \angle BSC=\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right),$$

以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ。

求证：$\theta=\pi-\arccos(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta)$。

3．(本题 16 分)已知：(1) 半圆的直径 AB 长为 $2r$；(2) 半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直，垂足为 T，$|AT|=2a\left(2a<\frac{r}{2}\right)$；(3) 半圆上有相异两点 M、N，它们与直线 l 的距离 $|MP|$、$|NQ|$ 满足条件

$$\frac{|MP|}{|AM|}=\frac{|NQ|}{|AN|}=1.$$

求证：

$$|AM|+|AN|=|AB|.$$

4．(本题 20 分)已知边长为 4 的正三角形 ABC。D、E、F 分别是 BC、CA、AB 上的点，且 $|AE|=|BF|=|CD|=1$。连结 AD、BE、CF，交成 $\triangle RQS$。P 点在 $\triangle RQS$ 内及其边上移动，P 点到 $\triangle ABC$ 三边的距离分别记作 x、y、z。

(1) 求证当 P 点在 $\triangle RQS$ 的顶点位置时，乘积 xyz 有极小值；

(2) 求上述乘积 xyz 的极小值。

5．(本题 20 分)已知圆 $x^2+y^2=r^2$(r 为奇数)，交 x 轴于 $A(r,0)$、$B(-r,0)$，交 y 轴于 $C(0,-r)$、$D(0,r)$。$P(u,v)$ 是圆周上的点，$u=p^m$，$v=q^n$(p、q 都是质数，m、n 都是自然数)，且 $u>v$。点 P 在 x 轴和 y 轴上的射影分别是 M、N。

求证：$|AM|$、$|BM|$、$|CN|$、$|DN|$ 分别为 1、9、8、2。

解　答

1．选择题

(1) [解](C)　由正五边形所有的对角线都相等，可见(A)不正确。任作两条等长的相交线段 AC 和 BD，这样所得的四边形 $ABCD$ 对角线相等，可见(B)不正确。其实，(A)与(B)都是(C)的真子集，可不必考虑，因若(A)或(B)成立，则(C)必成立。显见，连接两条等长且相交的线段端点所得的四边形未必边相等或内角相等，又得到(D)不正确。

(2) [解](C)　这方程可写成 $\rho=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$。令 $\theta'=\theta+\frac{\pi}{4}$，得

$$\rho=\frac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta'}.$$

在极轴 OX 经顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 所得到的新极坐标系中，可知其曲线是 $e=\sqrt{2}$ 的圆锥曲线，它是双曲线。

(3) [解](A)　由条件可得

$$x=2^{\frac{1}{2}}=8^{\frac{1}{6}}=32^{\frac{1}{10}},\quad y=3^{\frac{1}{3}}=9^{\frac{1}{6}},\quad z=5^{\frac{1}{5}}=25^{\frac{1}{10}},$$

据幂函数的单调性可知，$z<x<y$。

(4) [解](B)　这方程确定的曲线是以点 $(1,0)$、$(2,1)$、$(1,2)$、$(0,1)$ 为顶点的正方形，其边长为

$\sqrt{2}$，因此，面积为2.

(5) [解](D)　我们知道，如果 $\alpha>0$，则 $\sin\alpha<\alpha$.

$$\because\quad \phi\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),\quad \therefore\quad 0<\sin\phi<\phi<\frac{\pi}{2}.$$

而 $\cos x$ 在区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数，

$$\therefore\quad \cos\phi<\cos\sin\phi. \qquad ①$$

由 $\cos\phi\in(0,1)$，又可知

$$\sin\cos\phi<\cos\phi. \qquad ②$$

由①、②可知　$\sin\cos\phi<\cos\phi<\cos\sin\phi$.

(6) [解](B)　这实系数一元二次方程有实数根，

$$\therefore\quad \Delta=[-(k-2)]^2-4\times1\cdot(k^2+3k+5)\geqslant0.$$

可解得

$$-4\leqslant k\leqslant-\frac{4}{3}.$$

由韦达定理，经整理，得到 $x_1^2+x_2^2=-(k+5)^2+19$.

$\therefore$　当 $k=-4$ 时，$x_1^2+x_2^2$ 取到最大值，这最大值 $=18$.

(7) [解](B)

$$\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}y=\pi. \qquad ①$$

即　$\operatorname{arc\,tg}x=\pi-\operatorname{arc\,ctg}y$，　$\therefore$　$\operatorname{tg}\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arc\,ctg}y)$，

因此

$$x=-\frac{1}{y}. \qquad ②$$

如果②成立，当 $x>0$，$y<0$ 时，有

$$\operatorname{arc\,tg}x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),\qquad \pi-\operatorname{arc\,ctg}y\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

可知①式成立；

当 $x<0$，$y>0$ 时，有

$$\operatorname{arc\,tg}x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right),\qquad \pi-\operatorname{arc\,ctg}y\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right),$$

可知①式不成立。

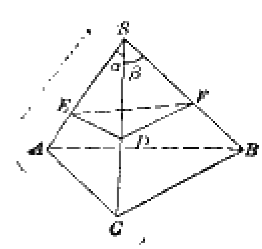
$$\therefore\quad N=\{(x,y);xy=-1,\ x>0\}.$$

而 $M=\{(x,y);xy=-1$ 或 $1,\ x>0\}$，$\therefore$　$N\subset M$，因此，$M\cup N=M$.

(8) [解](D)　(i) 甲 $=ab+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$，　乙 $=ab+\dfrac{1}{ab}+2$，

由题设易得，必定有甲>乙

(ii)　当 $a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，经计算可知，甲>丙；而当 $a=2$，$b=3$ 时，则有甲<丙，说明甲和丙的值的大小与 a、b 取值有关。



2. [证明]　在棱 SC 上取适当的点 D，过点 D 分别在 ASC 平面和 BSC 平面上作棱 SC 的垂线，交 SA 于 E，交 SB 于 F。连结 EF。

设 $SD=1$，则

在 $\mathrm{Rt}\triangle ESD$ 中，$ED=\operatorname{tg}\alpha$，$ES=\sec\alpha$；

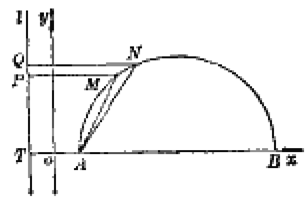
在 $\mathrm{Rt}\triangle FSD$ 中，$FD=\operatorname{tg}\beta$，$FS=\sec\beta$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFS$ 中，$EF^2=ES^2+FS^2=\sec^2\alpha+\sec^2\beta$.

而在 $\triangle EDF$ 中，$\angle EDF=\theta$，

$$\cos\theta=\frac{ED^2+FD^2-EF^2}{2ED\cdot FD}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta-(\sec^2\alpha+\sec^2\beta)}{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta,$$

$\therefore\quad \theta = \arccos(-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta) = \pi - \arccos(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta)$.



3. [证法一] 以线段 TA 的中点 O 为原点，以有向直线 TA 为 x 轴，如图，建立平面直角坐标系。

由题设可知，M、N 均为抛物线 $y^2=4ax$ 与圆 $[x-(r+a)]^2+y^2=r^2$ 的交点。

上述方程所组成的方程组中，消去 y，经整理得

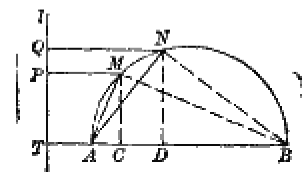
$$x^2+(2a-2r)x+2ra+a^2=0.$$

条件 $2a<\frac{r}{2}$ 保证这方程有两个不相等的实数根 x_1、x_2，它们分别是 M、N 点的横坐标。有

$$x_1+x_2=2r-2a.$$

$\because\quad |AM|=|PM|=x_1+a,\ |AN|=|QN|=x_2+a,\ |AB|=2r,$

$\therefore\quad |AM|+|AN|=|AB|.$



[证法二] 作 $MC\perp AB$，$ND\perp AB$，C、D 均为垂足。

在 $\mathrm{Rt}\triangle AMB$ 中，$AM^2=AC\cdot AB$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ANB$ 中，$AN^2=AD\cdot AB$，

$\therefore\quad AN^2-AM^2=(AD-AC)AB$，

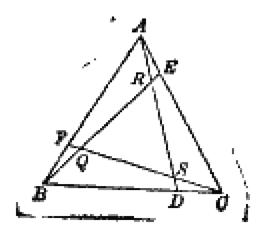
即
$$(AN+AM)(AN-AM)=(AD-AC)AB.$$

$\because\quad AD-AC=CD$，

$AN-AM=NQ-MP=CD$，

$\therefore\quad AM+AN=AB.$

4. [分析] 由于 $x+y+z=$ 常数（正三角形的高），因此乘积 xyz 在 $x=y=z$ 时（此时，P 点位于 $\triangle ABC$ 的中心 O），取到极大值；而要 xyz 取到极小值，也就是要 x、y、z 的大小最为悬殊，亦即要 P 点尽量远离中心。下面的证明也就是把这想法作出严格的表述。在证明过程中，注意到图形的对称性能使表达得以简化。



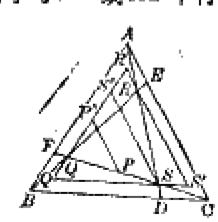
[证明] 如图标上各点。记 $\triangle ABC$ 的中心为 O，把图形以 O 点为中心逆时针旋转 $120°$ 后，A 变为 B，B 变为 C，C 变为 A；E 变为 F，F 变为 D，D 变为 E，从而 R 变成 Q，Q 变成 S，S 变成 R。分别用 P_1，P_2，P_3 表示点 P 到 BC，CA，AB 的距离（同样，S_1 表示点 S 到 BC 的距离，R_2 表示点 R 到 CA 的距离，等等），可见 $S_1=R_2=Q_3$，$S_2=R_3=Q_1$，$S_3=R_1=Q_2$。

如果两个数 x，y 之和为 a，那么他们的乘积

$$xy=\frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2]=\frac{1}{4}[a^2-(x-y)^2]$$

所以，如果 $x+y=$ 常数 a，当 $x=y=\frac{a}{2}$ 时，乘积 xy 最大；而在 $|y-x|$ 较大时，xy 的值较小。

由于正三角形 ABC 内任意一点 P 到三边的距离之和等于该三角形的高，因此，如果 l 是与 BC 平行的直线，当 P 在 l 上变动时，P 到三边的距离乘积在 P_0（l 与 BC 边上的高的交点）处为最大，而当 $|PP_0|$ 较大时，P 到三边的距离之积较小，而且，l 上与 P_0 等距离的点，这乘积是相等的。对于与 AC 或 AB 平行的直线，也有同样的结论。



对于 $\triangle RQS$ 内任何点 P，过 P 作 BC 的平行线 l，l 与 $\triangle RQS$ 的交点为 L，N。这时，$|LP_0|$ 与 $|NP_0|$ 中总有一个比 $|PP_0|$ 大，所以乘积的最小值必定在 $\triangle RQS$ 的边上取到。

过 Q 作 AB 的平行线，过 S 作 BC 的平行线，过 R 作 AC 的平行线，这三条直线交得 $\triangle R'Q'S'$，这是与 $\triangle ABC$ 同中心的正三角形。

对于 QS 上的点 P，过 P 和 S 作 AC 的平行线，分别与 $R'Q'$ 交于 P'' 和 S''。易见，S'' 与 S 关于 AC

边上的高对称，S'' 与 Q 关于 AB 边上的高对称。这时，

$$P_1P_2P_3 \geqslant P_1''P_2''P_3'' \geqslant Q_1Q_2Q_3 \quad (Q_1Q_2Q_3 = S_1''S_2''S_3'' = S_1S_2S_3).$$

所以，当 P 在 $\triangle RQS$ 内（包括三边上）时，乘积 $P_1P_2P_3 \geqslant Q_1Q_2Q_3$，即乘积在顶点处取极小值。

最后，计算这极小值。由于 $\triangle ARE \backsim \triangle ACD$，

$$\therefore \quad |AR|:|RE| = 4:1,$$

由于 $\triangle AFS \backsim \triangle ADB$，

$$\therefore \quad |AS|:|SF| = 4:3,$$

因此，
$$|AR|:|RS|:|SD| = 4:8:1.$$

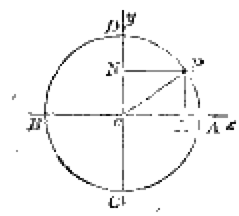
$\because$ $\triangle ABC$ 的高 $H = \sqrt{12}$，

而 $S_1 = \frac{1}{13}H$，$S_2 = \frac{3}{13}H$，$S_3 = \frac{9}{13}H$，

$$\therefore \quad S_1S_2S_3 = \frac{1}{13} \times \frac{3}{13} \times \frac{9}{13} \times (\sqrt{12})^3 = \frac{648}{2197}\sqrt{3}.$$

此即所求的极小值。

5. ［分析］这是有关质数的问题，可考虑用奇偶分析以及自然数分解质因数的性质解决。因此，宜把 $u^2 + v^2 = r^2$ 写成 $(r+u)(r-u) = v^2$，再逐步进行深入讨论。



［证明］：因为 r 为奇数，且 $u^2 + v^2 = r^2$，所以 u、v 必为一奇一偶。

(1) 设 u 为偶数，由题意得 $u = 2^m$。由于 $(r+u)(r-u) = v^2 = q^{2n}$，（其中 q 为奇质数）

因此 $r + u = q^\alpha$，$r - u = q^\beta$，（其中 $\alpha > \beta$）

$$\therefore \quad 2u = q^\alpha - q^\beta = q^\beta(q^{\alpha-\beta} - 1),$$

可见 q^β 是 $2u = 2^{m+1}$ 的因数，

$$\therefore \quad \beta = 0,\ r = u + q^\beta = 2^m + 1,$$

$$q^{2n} = v^2 = (r+u)(r-u) = 2^{m+1} + 1,$$

进而得
$$(q^n + 1)(q^n - 1) = 2^{m+1},$$

因此 $q^n + 1 = 2^\delta$，$q^n - 1 = 2^\varphi$，（其中 $\delta > \varphi$）

于是
$$q^n = \frac{1}{2}(2^\varphi + 2^\delta) = 2^{\varphi-1}(2^{\delta-\varphi} + 1).$$

$\because$ q 是奇数，

$\therefore$ $\varphi - 1 = 0$，$\varphi = 1$，

从而 $q^n - 1 = 2$，$v = q^n = 3$，

$\therefore$ $2^{m+1} = (q^n+1)(q^n-1) = 4 \times 2 = 2^3$，$m = 2$，

因此 $u = 2^m = 4$，$r = 2^m + 1 = 5$，

$\therefore$ $|AM| = 1$，$|BM| = 9$，$|CN| = 8$，$|DN| = 2$。

(2) 设 v 为偶数，同理可得 $u = 3$，$v = 4$，这与题设 $u > v$ 不合，舍去。

［说明］：在得出 u、v 必为一奇一偶，并设 u 为偶数之后，若写成 $(r+v)(r-v) = u^2$，也可证明此命题。这种证法与前面的证法有不少共通之处，就不在此列入了。

1983年省、市、自治区中学生联合数学竞赛试题

第 一 试

1. 选择题(本题满分32分．本题共8个小题，每一小题答对者得4分，答错者得0分，不答者得1分．)

(1) 设 p, q 是自然数，条件甲：p^3-q^3 是偶数；条件乙：$p+q$ 是偶数．那么

(A) 甲是乙的充分而非必要条件

(B) 甲是乙的必要而非充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件．

(2) $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$ 的值是属于区间

(A) $(-2, -1)$　(B) $(1, 2)$

(C) $(-3, -2)$　(D) $(2, 3)$

(3) 已知等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 及高 AD 的长都是整数，那么 $\sin A$ 和 $\cos A$ 中

(A) 一个是有理数，另一个是无理数

(B) 两个都是有理数

(C) 两个都是无理数

(D) 是有理数还是无理数要根据 BC 和 AD 的数值来确定

(4) 已知 $M=\{(x, y)\,|\,y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x, y)\,|\,x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$．那么，使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是

(A) $a\geqslant 1\frac{1}{4}$　(B) $a=1\frac{1}{4}$　(C) $a\geqslant 1$　(D) $0<a<1$．

(5) 已知函数 $f(x)=ax^2-c$，满足：

$$-4\leqslant f(1)\leqslant -1,\quad -1\leqslant f(2)\leqslant 5.$$

那么，$f(3)$ 应满足

(A) $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　(B) $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$．

(C) $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　(D) $-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant \frac{35}{3}$．

(6) 设 $a、b、c、d、m、n$ 都是正实数，

$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{m}+\dfrac{d}{n}}$．那么

(A) $P\geqslant Q$　(B) $P\leqslant Q$　(C) $P<Q$

(D) $P、Q$ 间的大小关系不确定，而与 $m、n$ 的大小有关．

(7) 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P，使 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$ 都是

等腰三角形，那么，具有这样性质的 P 点个数共有

(A) 9 个　(B) 17 个　(C) 1 个　(D) 5 个。

(8) 任意 $\triangle ABC$，设它的周长、外接圆半径长与内切圆半径长分别为 l、R 与 r，那么

(A) $l>R+r$　　(B) $l\leqslant R+r$

(C) $\frac{l}{6}<R+r<6l$　　(D) (A)，(B)，(C)三种关系都不对。

2. 填充题(本题满分 18 分，每小题为 6 分)

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，那么 $\cos C$ 的值等于__________。

(2) 三边均为整数，且最大边长为 11 的三角形，共有__________个。

(3) 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都边长为 a 的正三角形，这样两个多面体的内切球的半径之比是一个既约分数 $\frac{m}{n}$。那么，积 $m\cdot n$ 是__________。

第　二　试

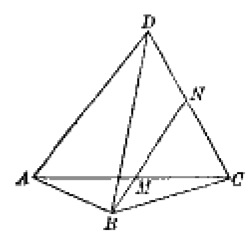
1. (本题满分 8 分)　求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，其中 $x\in[-1,1]$。

2. (本题满分 12 分)　函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，$f(0)=f(1)$。如果对于任意不同的 x_1、$x_2\in[0,1]$，都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$。

求证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$。

3. (本题满分 16 分)　如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle ABC$ 的面积比是 3:4:1，点 M，N 分别在 AC，CD 上，满足 $AM:AC=CN:CD$，并且 B，M，N 三点共线。

求证：M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点。



4. (本题满分 16 分)　在六条棱长分别为 2，3，3，4，5，5 的所有四面体中，最大的体积是多少？证明你的结论。

5. (本题满分 18 分)　函数 $F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$

在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A，B 有关。问 A，B 取什么值时 M 为最小？证明你的结论。

解　　答

第　一　试

1. 选择题

(1) [解](C)　就两个自然数 p、q 分别取奇数或偶数的四种情况：

(i) $\begin{cases}p\text{ 是奇数,}\\q\text{ 是奇数;}\end{cases}$　(ii) $\begin{cases}p\text{ 是偶数,}\\q\text{ 是偶数;}\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}p\text{ 是奇数,}\\q\text{ 是偶数;}\end{cases}$　(iv) $\begin{cases}p\text{ 是偶数,}\\q\text{ 是奇数。}\end{cases}$

进行讨论，有

$$p^2-q^2\text{ 是偶数}\Longleftrightarrow\begin{cases}p\text{ 是奇数,}\\q\text{ 是奇数,}\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}p\text{ 是偶数,}\\q\text{ 是偶数.}\end{cases}\Longleftrightarrow p+q\text{ 是偶数.}$$

(2) [解](D) $x=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{10}=\log_3 10.$

$2=\log_3 9<\log_3 10<\log_3 27<3.$

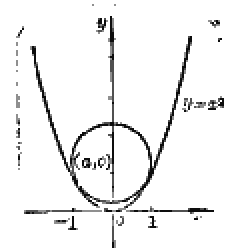
(3) [解](B) 在等腰$\triangle ABC$中，设 $t=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right)=\operatorname{tg}\frac{A}{2}$,

∵ 底边 BC 与高 AD 的长都是整数，

又 $t=\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{2AD}$,

∴ t 是有理数.

于是，从 $\sin A=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos A=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，得 $\sin A$, $\cos A$ 都是有理数.



(4) [解](A) $M=\{(x,y)\,|\,y\geqslant x^2\}$是表示抛物线 $y=x^2$ 开口内且包括周界的区域.

$N=\{(x,y)\,|\,x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$ 是表示以点$(0,a)$为圆心，1 为半径且包括圆周的区域.

使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是：圆 $x^2+(y-a)^2=1$ 在抛物线 $y=x^2$ 的开口内，且与其可有公共点.

设(x,y)为抛物线 $y=x^2$ 上的任意点，由它与圆心$(0,a)$距离的关系，得到所求的充要条件为:

$$\begin{cases}x^2+(y-a)^2\geqslant 1\\y=x^2\\a\geqslant 1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y^2-(2a-1)y+a^2-1\geqslant 0\cdots(*)\\y=x^2\\a\geqslant 1\end{cases}$$

因$(*)$式对于任何 $y\in R$ 成立的充要条件为

$$\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-1)\leqslant 0,$$

解得 $a\geqslant\frac{5}{4}$.

于是得到 $M\cap N=N$ 的充要条件是 $a\geqslant 1\frac{1}{4}$.

(5) [解](C) 由 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，得 $-4\leqslant a-c\leqslant -1$,

$$\therefore\ 1\leqslant c-a\leqslant 4.\qquad ①$$

由 $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，得

$$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5.\qquad ②$$

由①+②，得 $0\leqslant 3a\leqslant 9$，即 $0\leqslant a\leqslant 3$,

$$\therefore\ 0\leqslant 5a\leqslant 15.\qquad ③$$

由②+③，得 $-1\leqslant 9a-c\leqslant 20$，即 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

(6) [解](B) ∵ a、b、c、d、m、n 是正实数，

$$Q=\sqrt{ab+\frac{mad}{n}+\frac{ncb}{m}+cd}\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}=P.$$

(7) [解](A) 因为以正方形的边为一腰的等腰三角形的底边端点是在以正方形的顶点为圆心，边长为半径的圆上．这样的四个圆的 8 个交点，是满足要求的，又因为这些交点也在正方形边的中垂线上，也是以正方形的边为底的等腰三角形的顶点．此外，正方形边的中垂线的交点，即中心，也满足要求，它所做成的四个等腰三角形都是以正方形的边为底的.

(8) [解](D) 由正弦定理$R=\frac{a}{2\sin A}$，对于边长 a 为定值的任意三角形 ABC，总存在一个锐角 A,

使其外接圆半径R大于任意给定的常数 $M\left(不妨假定\ M>\frac{a}{2}\right)$.

∵ 若要 $R=\frac{a}{2\sin A}>M$，只要

$$0<A<\arcsin\frac{a}{2M}.$$

∴ 对于任意 $\triangle ABC$，(A)、(C) 不可能.

当 $\triangle ABC$ 为正三角形，设边长为 a，则

$$l=3a,\quad R=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\quad r=\frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

此时，$l>R+r$，故(B)也不可能.

2. (1) [解] 在 $\triangle ABC$ 中，

∵ $\cos B=\frac{5}{13}<\frac{1}{2}$，

∴ $60°<B<90°$，且 $\sin B=\frac{12}{13}$.

又 $\sin A=\frac{3}{5}$，

∴ $\cos A=-\frac{4}{5}$， 或 $\cos A=\frac{4}{5}$.

(i) 若 $\cos A=-\frac{4}{5}$，则有

$$\cos A=-\frac{4}{5}<-\frac{1}{2},\quad 120°<A<180°,\quad 180°<A+B<270°,$$

这与已知条件相矛盾.

(ii) 若 $\cos A=\frac{4}{5}$，则有

$$\cos C=\cos(180°-A-B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}.$$

∴ $\cos C=\frac{16}{65}$.

(2) [解法一] 设三边均为整数，且最大边长是 11 的三角形的三边长为 a、b、c，并不妨假定 $a\leqslant b\leqslant c$.

(i) 当 $c=11$，$b=11$ 时，a 可取边长有 1, 2, …, 11 等 11 种情况；

(ii) 当 $c=11$，$b=10$ 时，a 可取边长有 2, 3, …, 10 等 9 种情况；

(iii) 当 $c=11$，$b=9$ 时，a 可取边长有 3, 4, …, 9 等 7 种情况；

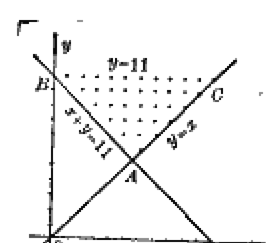
(iv) 当 $c=11$，$b=8$ 时，a 可取边长有 4, 5, 6, 7, 8 等 5 种情况；

(v) 当 $c=11$，$b=7$ 时，a 可取边长有 5, 6, 7 等 3 种情况；

(vi) 当 $c=11$，$b=6$ 时，a 可取边长只有 6 一种情况.

故共有这样的三角形是

$$11+9+7+5+3+1=36(个).$$



[解法二] ∵ $a\leqslant b\leqslant c$，$a, b\in N$，$c=11$，

又 $a+b>c$，即 $a+b>11$.

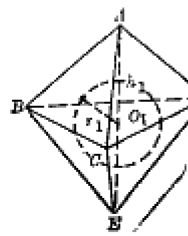
在直角坐标平面上作点集

$$\{(a,b)\mid a+b>11,\ a\leqslant b\leqslant 11,\ a,b\in N\}.$$

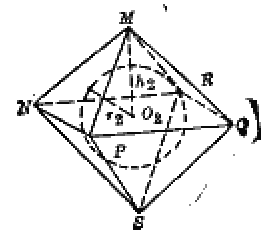
它是由直线 $x+y=11$，$y=11$，$y=x$ 所围成三角形区域内整点（包括 $y=11$，$y=x$ 上但不包括 $x+y=11$ 上整点）所组成.

不难求得这些整点共 36 个.

(3)［解］ 设六面体与八面体的内切球半径分别为 r_1 与 r_2，再设六面体中的正三棱锥 $A-BCD$ 的高为 h_1；八面体中的正四棱锥 $M-NPQR$ 的高为 h_2，则



(图 1)



(图 2)

$$h_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a,\quad h_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$\because\ V_{六面体}=2\times\frac{1}{3}h_1\cdot S_{\triangle BCD}=6\times\frac{1}{3}r_1\times S_{\triangle ABC}$,

$\therefore\ r_1=\frac{1}{3}h_1=\frac{\sqrt{6}}{9}a.$

又 $V_{八面体}=2\times\frac{1}{3}h_2\times S_{正方形NPQR}=8\times\frac{1}{3}\times r_2\times S_{\triangle MNP}$,

$\therefore\ \sqrt{2}a^3=2\sqrt{3}r_2a^2,\quad r_2=\frac{\sqrt{6}}{6}a.$

于是 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{9}a}{\frac{\sqrt{6}}{6}a}=\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$ 是既约分数即为 $\frac{m}{n}$.

$\therefore\ m\cdot n=6.$

第 二 试

1.［证明］ 因为 $x\in[-1,1]$，所以 $\arcsin x$，$\arccos x$ 有意义。由诱导公式与反余弦函数的定义，得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x,$$

又因为

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,$$

所以

$$0\geqslant-\arccos x\geqslant-\pi,$$

从而

$$\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\geqslant-\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{\pi}{2}-\arccos x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

因此 由反正弦函数的定义，可得

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

即

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

2.［证明］ 不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant1$,

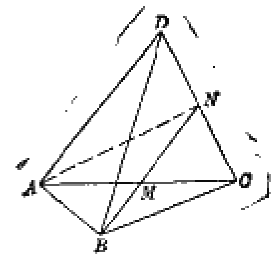
(1) 如果 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}.$$

(2) 如果 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$，由 $f(0)=f(1)$，得

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|$$
$$\leqslant(1-x_2)+(x_1-0)=1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}.$$

$\therefore\ |f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2},\quad x_1、x_2\in[0,1]$。



3.［证法一］ 不妨设

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r,\quad (0<r<1)$$

及 $\triangle ABC=1$，(此处 $\triangle ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积，下同)。

这时，$\triangle ABD=3$，$\triangle BCD=4$，$\triangle ACD=3+4-1=6$。

$\triangle ABM=r$，$\triangle BCM=1-r$，$\triangle BCN=4r$，$\triangle ACN=6r$，

$\triangle CNM=\triangle BCN-\triangle BCM=4r-(1-r)=5r-1$，

$\triangle AMN=\triangle ACN-\triangle CNM=6r-(5r-1)=r+1$，

因此，$\frac{\triangle AMN}{\triangle ACN}=\frac{r+1}{6r}$，又因 $\frac{\triangle AMN}{\triangle ACN}=\frac{AM}{AC}=r$，所以 $\frac{r+1}{6r}=r$，即 $6r^2-r-1=0$，这个方程在区间 $(0,1)$ 中有唯一解 $r=\frac{1}{2}$。即 M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点。

［证法二］ 不妨设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r$，$(0<r<1)$ 及 $\triangle ABC=1$，

这时，$\triangle ABD=3$，$\triangle BCD=4$，$\triangle ACD=6$。

$\triangle ABM=r$，$\triangle BCM=1-r$，$\triangle BCN=4r$，$\triangle ACN=6r$。

设两条对角线 AD 与 BD 交于 E，于是 $AE:EC=3:4$，且 $BD=7BE$，因此得：

$$\frac{\triangle BND}{\triangle BME}=\frac{BD\cdot BN}{BE\cdot BM}=\frac{7BN}{BM}=\frac{7\triangle BCN}{\triangle BCM}=\frac{28r}{1-r},$$

又由于

$$\frac{\triangle BND}{\triangle BME}=\frac{(1-r)\triangle BCD}{(EM/AC)\triangle ABC}=\frac{4(1-r)AC}{EM}=\frac{4(1-r)AC}{AC-(AE+MC)}$$
$$=\frac{4(1-r)AC}{AC-(3/7+1-r)AC}=\frac{28(1-r)}{7r-3}.$$

所以
$$\frac{28r}{1-r}=\frac{28(1-r)}{7r-3},$$

即
$$6r^2-r-1=0,$$

解得 $r=\frac{1}{2}$，所以 M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点。

4.［解］ 最大的体积是 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$。

根据三角形两边之差小于第三边这一性质，按题设的数据，所有一边是 2 的三角形，其余两边只可能是：① 3，3 ② 5，5 ③ 4，5 ④ 3，4。

从而，题设四面体中，以 2 为公共边的两个侧面三角形的其余两边只可能有下列三种情形：

(1) ①与②； (2) ①与③； (3) ②与④；

下面就这三种情形分别讨论之：

(1) 如下的左图，$AC=BC=3$，$AD=BD=5$，因 $3^2+4^2=5^2$，故 $CD\perp AC$，$CD\perp BC$，从而 CD 垂直于平面 ABC。

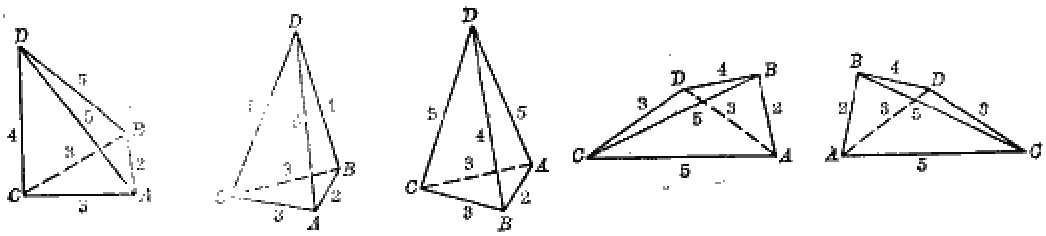
由对称性，这样的四面体只有一个。其体积为：

$$V_1=\frac{1}{3}CD\cdot\triangle ABC=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3^2-1}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

(其中 $\triangle ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积，下同)

(2) 这样的四面体有两个，如下的中、右两图。易知它们的体积相等，记为 V_2。

因 $2^2+4^2<5^2$，故 $\angle ABD$ 为钝角，即棱 BD 与平面 ABC 斜交，设 D 至底面 ABC 的高为 h_2，则 $h_2<BD=4$。故



$$V_2=\frac{1}{3}h_2\triangle ABC<\frac{4}{3}\triangle ABC=V_1=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

(3) 这样的四面体也有两个，如下图，它们的体积也相等，记为 V_3。

因 $2^2+5^2>5^2$，故 $\angle BAC$ 为锐角，即棱 AB 与平面 ACD 斜交，设 B 至底面 ACD 的高为 h_3。则 $h_3<AB=2$。故

$$V_3=\frac{1}{3}h_3\triangle ACD<\frac{2}{3}\triangle ACD=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 5\times\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{11}.$$

因 $V_3^2<\frac{275}{36}$，$V_1^2=\frac{128}{9}$，故 $V_3<V_1$。所以，最大的体积为

$$V_1=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

5. ［解法一］ (1) $F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$.

当 $A=B=0$ 时，$F(x)$ 成为 $f(x)=\sqrt{2}\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$，在区间 $\left[0,\ \frac{3\pi}{2}\right]$ 上，有三点

$$x_1=\frac{\pi}{8},\quad x_2=\frac{5\pi}{8},\quad x_3=\frac{9\pi}{8}$$

使 $f(x)$ 取得最大值 $M_f=\sqrt{2}$，它就是要求的最小的 M 的值。

(2) 下面证明，对任何 A，B 不同时为 0 时，有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}F(x)>\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}f(x)=M_f=\sqrt{2}.\quad(\text{注：}\max F(x)\text{是}F(x)\text{的最大值的记号})\qquad ①$$

分几种情形讨论之：

(i) 当 $A=0$，$B\neq 0$ 时，显然

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}F(x)=\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+B\right|=\sqrt{2}+|B|>\sqrt{2},$$

所以①式成立。

(ii) 当 $A>0$，$B\geqslant 0$ 时，因为 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B>\sqrt{2}$，所以①式成立。

(iii) 当 $A>0$，$B<0$ 时，应再分两种情形：

情形 1．若 $|B|<\frac{9\pi}{8}A$，则 $\frac{9\pi}{8}A+B>0$，于是 $F\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}$

所以①式成立。

情形 2．若 $|B|\geqslant\frac{9\pi}{8}A$，则 $|B|>\frac{5\pi}{8}A$，$\frac{5\pi}{8}A+B<0$，于是

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}\text{，所以①式成立。}$$

(iv) 当 $A>0$，$B\leqslant 0$ 时

$$\text{因为 }F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}\text{，所以①式成立。}$$

(v) $A<0$，$B>0$ 时，也应再分两种情形：

情形 1．若 $B<-\frac{5\pi}{8}A$，则 $\frac{5\pi}{8}A+B<0$，于是

$$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}\text{，所以①式成立。}$$

情形 2．若 $B\geqslant-\frac{5\pi}{8}A$，则 $B>-\frac{\pi}{8}A$，即 $\frac{\pi}{8}A+B>0$，于是

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}\text{，所以①式成立。}$$

综合上述(i)～(v)共五种情形，①式都成立。

［解法二］

(1) 同解法一。

(2) 下面证明，对任何 A，B 不同时为 0 时有：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}F(x)>\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}f(x)=M_f=\sqrt{2}\text{。}\qquad ①$$

用反证法证明：若设

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}F(x)\leqslant\sqrt{2}\text{。}\qquad ②$$

则应有 $$F\left(\frac{\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2}，\quad F\left(\frac{5\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2}，\quad F\left(\frac{9\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2}\text{。}$$

即 $$\begin{cases}\left|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\right|\leqslant\sqrt{2}，\\ \left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|\leqslant\sqrt{2}，\\ \left|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\right|\leqslant\sqrt{2}\text{。}\end{cases}$$ 即 $$\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B\leqslant\sqrt{2}，\\ -\sqrt{2}\leqslant-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\leqslant\sqrt{2}，\\ -\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\leqslant\sqrt{2}\text{。}\end{cases}$$

也就是 $$\begin{cases}-2\sqrt{2}\leqslant\frac{\pi}{8}A+B\leqslant 0，\\ 2\sqrt{2}\geqslant\frac{5\pi}{8}A+B\geqslant 0，\\ -2\sqrt{2}\leqslant\frac{9\pi}{8}A+B\leqslant 0\text{。}\end{cases}$$ 由 $$\begin{cases}\frac{\pi}{8}A+B\leqslant 0，\\ \frac{5\pi}{8}A+B\geqslant 0\text{，}\end{cases}\Longrightarrow\frac{4\pi}{8}A\geqslant 0\Longrightarrow A\geqslant 0\text{。}$$

而由 $$\begin{cases}\frac{5\pi}{8}A+B\geqslant 0，\\ \frac{9\pi}{8}A+B\leqslant 0\text{，}\end{cases}\Longrightarrow\frac{4\pi}{8}A\leqslant 0\Longrightarrow A\leqslant 0\text{。}$$

因而 $A=0$。

但当 $A=0$，$B\neq 0$ 时有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}F(x)=\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+B\right|=\sqrt{2}+|B|>\sqrt{2}\text{。}$$

与②式矛盾，所以①式成立。

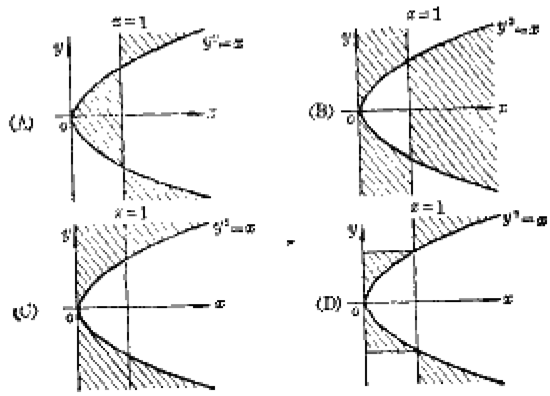
1984年省、市、自治区中学生联合数学竞赛试题

第 一 试

1．选择题(本题满分40分。每小题答对得5分，答错得0分，不答得1分。)

(1) 集合$S=\{\bar{Z}^2|\arg Z=\alpha, \alpha$ 为常数$\}$在复平面的图形是 (A)射线 $\arg Z=2\alpha$ (B) 射线 $\arg Z=-2\alpha$ (C) 射线 $\arg Z=-\alpha$ (D) 上述答案都不对。

(2) 下列四个图的阴影部分(不包括边界)满足不等式 $\log_x(\log_x y^2)>0$ 的是



(3) 对所有满足 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$ 的 m、n，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示的不同双曲线条数是 (A) 15 (B) 10 (C) 7 (D) 6。

(4) 方程 $\sin x=\lg x$ 的实根个数是 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 大于3。

(5) 若 $a>0$，$a\neq 1$，$F(x)$ 是一奇函数，则

$$G(x)=F(x)\cdot\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$$

是 (A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 不是奇函数也不是偶函数 (D) 奇偶性与 a 的具体数值有关。

(6) 若 $F\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$，则下列等式中正确的是

(A) $F(-2-x)=-2-F(x)$

(B) $F(-x)=F\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(C) $F(x^{-1})=F(x)$

(D) $F(F(x))=-x$。

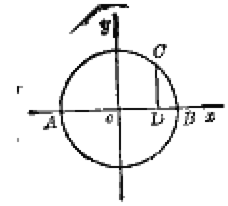
(7) 若动点 $P(x,y)$ 以等角速度 ω 在单位圆上逆时针运动，则点 $Q(-2xy, y^2-x^2)$ 的运动方式是 (A) 以角速度 ω 在单位圆上顺时针运动 (B) 以角速度 ω 在单位圆上逆时针运动 (C) 以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动 (D) 以角速度 2ω 在单

位圆上逆时针运动。

(8) 若四面体的一条棱长是 x，其余棱长都是 1，体积是 $F(x)$，则函数 $F(x)$ 在其定义域上 (A) 是增函数但无最大值 (B) 是增函数且有最大值 (C) 不是增函数且无最大值 (D) 不是增函数但有最大值。

2．填充题(本题满分 10 分，每小题 5 分。)

(1) 如图，AB 是单位圆的直径，在 AB 上任取一点 D，作 $DC\perp AB$，交圆周于 C。若 D 点的坐标为 $(x, 0)$ 则当 $x\in($, $)$时，线段 AD、BD、CD 可构成锐角三角形。



(2) 方程 $\cos\frac{x}{4}=\cos x$ 的通解是(　　)，在$(0, 24\pi)$内，不相同的解有(　　)个。

第　二　试

1．(本题满分 15 分，每小题 5 分。)下列命题是否正确?若正确，请给予证明。否则举出反例。

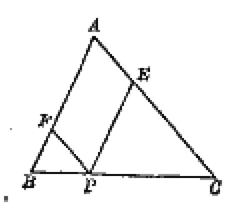
(1) 若 P、Q 是直线 l 同侧的两个不同点，则必存在两个不同的圆，通过点 P、Q 且和直线 l 相切。

(2) 若 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq 1$，$b\neq 1$，则 $\log_a b+\log_b a\geqslant 2$。

(3) 设 A、B 是坐标平面上的两个点集，$C_r=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$。若对任何 $r\geqslant 0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$。

2．(本题满分 10 分)已知两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，它们的公垂线 $A'A$ 的长度为 d。在直线 a、b 上分别取点 E、F，设 $A'E=m$，$AF=n$，求 EF(A' 在直线 a 上，A 在直线 b 上)。

3．(本题满分 15 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，P 为 BC 边上任意一点，$PE\parallel BA$，$PF\parallel CA$。若 $S_{\triangle ABC}=1$，证明 $S_{\triangle BPF}$，$S_{\triangle PCE}$ 和 $S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于 $\frac{4}{9}$。($S\cdots$表示图形的面积。)



4．(本题满分 15 分)设 a_n 是 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，$n=1, 2, 3, \cdots$。试证 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是有理数。

5．(本题满分 15 分)设 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 都是正数，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n。$$

解　　答

第　一　试

1．选择题

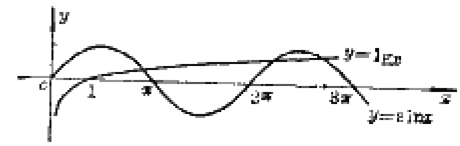
(1) [解](B)或(D)　根据一对共轭复数的模相等，幅角的终边关于 x 轴对称，和复数的平方是模的平方且幅角乘以 2，可以确定集合 S 在复平面上的图形，只要 $\arg Z=\alpha$(α 为常数)能成立，图形就是一条射线。但是，由于本题记号 $\arg Z$ 的含义不明确，于是可以有两种不同的答案。若 $\arg Z$ 表示复数Z的一个幅角，则答案为(B)；若 $\arg Z$ 表示复数Z的幅角主值，则答案是 (D)。(六年制重点中学高中数学课本第二册中，把 $\arg Z$ 规定为幅角主值，而统编十年制数学课本未作此规定。)

(2) [解](D)　由不等式 $\log_x(\log_x y^2)>0$，判断它所表示的区域。当 $x>1$ 时，可得 $y^2>x>1$；当 $0<$

$x<1$ 时，可得 $1>y^2>x>0$，然后与抛物线 $y^2=x$ 比较即可。

(3) ［解］(D)　圆锥曲线的极坐标方程 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$，当且仅当 $e>1$ 时表示双曲线，因此本题方程必须满足 $C_m^n>1$，又由于 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$，所以可得 6 个不同的值：$C_5^1, C_5^2, C_4^1, C_4^2, C_3^1, C_2^1$。

(4) ［解］(C)　判断方程 $\sin x=\lg x$ 解的个数，就是确定正弦曲线 $\sin x$ 和对数函数 $\lg x$ 的图象的交点个数。首先确定 x 的范围。由 $\lg x$ 的定义知 $x>0$，又 $\because\ \sin x\leqslant 1$，$\therefore\ \lg x\leqslant 1$ 从而得 $0<x\leqslant 10$。在直角坐标系当中作出 $0<x\leqslant 10$ 范围内 $y=\sin x$ 和 $y=\lg x$ 的图象（如下图）。$\because\ 0=\lg 1<\sin 1$，$\lg\pi>\sin\pi=0$，$\therefore$ 当 $x\in(1,\pi)$ 时，$\sin x=\lg x$ 必有一解。同理可知，当



$$x\in\left(2\pi,\ 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\quad 和\quad x\in\left(2\pi+\frac{\pi}{2},\ 3\pi\right)$$

时，方程各有一解。

(5) ［解］(B)　$\because\ G(x)=F(x)\cdot\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}$，

$$\therefore\ G(-x)=F(-x)\cdot\frac{a^{-x}+1}{2(a^{-x}-1)}=-F(x)\cdot\frac{a^x+1}{2(1-a^x)}=G(x)。$$

即 $G(x)$ 是偶函数。

(6) ［解］(A)　先求出 $F(x)$ 的表达式。作变换 $t=\frac{1-x}{1+x}$，得

$$x=\frac{1-t}{1+t}。\qquad\therefore\ F(t)=\frac{1-t}{1+t}。$$

然后一一验证，知 $F(-2-x)=-2-F(x)$。

(7) ［解］(C)　将动点 $P(x,y)$ 的坐标用参数式表示：

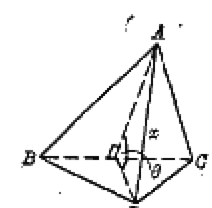
$$P(x,y):\begin{cases}x=\cos\omega t\\ y=\sin\omega t\end{cases}\quad 其中\ t\ 为参数。$$

动点 $Q(-2xy,\ y^2-x^2)$ 可表示为：

$$Q(x',y'):\begin{cases}x'=-2xy=-\sin 2\omega t=\cos\left(-2\omega t+\frac{3}{2}\pi\right),\\ y'=y^2-x^2=-\cos 2\omega t=\sin\left(-2\omega t+\frac{3}{2}\pi\right).\end{cases}$$

很明显，角 ωt 与 $-2\omega t$ 的旋转方向是相反的。

(8) ［解］(D)　如图所示。把棱长是 x 的一边 AD 作为一条侧棱，当 x 由 0 逐渐增大时，侧棱 x 所对应的侧面 ABC 与底面 DBC 的两面角 θ 亦由 0 逐渐增大，当 $\theta=90°$ 时，体积 $F(x)$ 达到最大值（此时侧面的高即为体高）。当 x 继续增大，θ 也从 $90°$ 继续增大，但此时体高却不断减小，因此体积亦逐渐减小。



2. 填充题

(1) ［解］$\because$ 三条线段 AD、BD、CD 构成锐角三角形的充要条件是其中最大线段的平方小于另二条线段的平方和。由对称性，不妨假设 $0\leqslant x\leqslant 1$，则三条线段中 AD 为最大。$\therefore$ 它们必须满足 $AD^2<BD^2+CD^2$。$\because$ CD 是 AD、BD 的比例中项，$\therefore$ $CD^2=AD\cdot BD$。又 $\because$ $AD=1+x$，$BD=1-x$，于是得 $(1+x)^2<(1-x)^2+(1+x)(1-x)$。化简得，

$$x^2+4x-1<0.$$

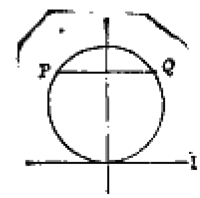
$$\therefore\ 0\leqslant x<-2+\sqrt{5}。\qquad\therefore\ x\in(2-\sqrt{5},\ \sqrt{5}-2)。$$

(2) ［解］很明显，方程的通解是 $x=\frac{8m}{5}\pi$ 与 $x=\frac{8n}{3}\pi$，$m,n\in Z$。

当 $x=\frac{8}{5}m\pi\in(0,\ 24\pi)$ 时，$0<m<15$，m 可取 $1,2,3,\cdots,14$，即 14 个解；当 $x=\frac{8}{3}n\pi\in(0,\ 24\pi)$

时，$0<n<9$，n 可取 1，2，…，8，即 8 个解。但其中当 $m=5$ 与 $n=3$，$m=10$ 与 $n=6$ 时，解相同。故在 $(0,24\pi)$ 中不同的解有 20 个。

第 二 试

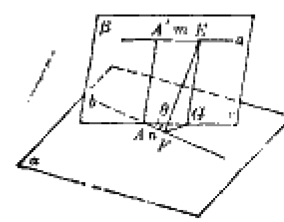


1．(1)［解］ 反例：如图所示，当 $PQ\parallel l$ 时，只能作出一个满足要求的圆，∴ 命题不正确。

(2)［解］ 考虑到 $\log_a b$，$\log_b a$ 不一定都是正数，举反例：当取 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$ 时，$\log_a b+\log_b a=-1-1=-2<2$。 ∴ 命题不正确。

(3)［解］ 首先考虑，能不能找到这样的集合 A、B 及点 a，使 $a\in A$，但 $a\notin B$。由于对任一个 $a\in A$ 而 $a\notin C_r$ 的 a。 ∵ $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，故必满足 $a\in B$ 因此上述的 a 点必须在 $C_r\cap A$ 中且不在 $C_r\cap B$ 中，并对任何 $r\geqslant 0$ 都成立。

现在我们举反例如下：不妨取 A 为任何含 $(0,0)$ 点的集合，B 为 A 去掉点 $(0,0)$ 的集合，显然对于任何 $r\geqslant 0$，A，B 满足 $C_r\cup A\equiv C_r\cup B$。而 $(0,0)\in A$，但 $(0,0)\notin B$， ∴ $A\neq B$，即命题不正确。



2．［解］ 如图所示．设过 b 与 a 平行的平面为 α，过 a 和 AA' 的平面为 β，$\alpha\cap\beta=c$，b，c 所成的角为 θ，则 $c\parallel a$，$AA'\perp c$， ∵ $AA'\perp b$，∴ $AA'\perp\alpha$，$\beta\perp\alpha$ ∴ $AA'\perp\alpha$、$\beta\perp\alpha$。在平面 β 内作 $EG\perp c$，则 $EG=AA'$ ∴ $EG\perp\alpha$。连结 FG，由 $EG\perp GF$，得 $EF^2=EG^2+FG^2$。

∵ $AG=m$，$AF=n$，

∴ $FG^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta$，$EG^2=AA'^2=d^2$。

∴ $EF^2=d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta$。

若点 F（或点 E）在 A（或 A'）的另一侧，则

$$EF^2=d^2+m^2+n^2+2mn\cos\theta.$$

$$\therefore\quad EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}.$$

3．［解］ 很明显，$S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$、$S_{\square PEAF}$ 由点 P 的位置决定。

∵ $\triangle BPF\backsim\triangle BCA$，$\triangle PCE\backsim\triangle BCA$，

∴ $\dfrac{S_{\triangle BPF}}{S_{\triangle BCA}}=\left(\dfrac{BP}{BC}\right)^2$，$\dfrac{S_{\triangle PCE}}{S_{\triangle BCA}}=\left(\dfrac{CP}{BC}\right)^2$，$S_{\square PEAF}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BPF}-S_{\triangle PCE}$。

设 $\dfrac{BP}{BC}=t\,(0\leqslant t\leqslant 1)$，且 $S_{\triangle ABC}=1$，得

$$S_{\triangle BPF}=t^2,\ S_{\triangle PCE}=(1-t)^2,\ S_{\square PEAF}=1-t^2-(1-t)^2=2t(1-t).$$

原题需证 $S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$、$S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于 $\frac{4}{9}$，亦就是证不能都小于 $\frac{4}{9}$。现采用反证法如下：

不妨假设 $S_{\triangle BPF}<\frac{4}{9}$，$S_{\triangle PCE}<\frac{4}{9}$，$S_{\square PEAF}<\frac{4}{9}$，于是得不等式组：

$$\begin{cases}t^2<\dfrac{4}{9},\\[2mm] 1-t^2<\dfrac{4}{9},\\[2mm] 2t(1-t)<\dfrac{4}{9}.\end{cases}\qquad \text{即}\qquad \begin{cases}0\leqslant t<\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{3}<t\leqslant 1,\\[2mm] t>\dfrac{2}{3}\ \text{或}\ t<\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

显然此不等式组无解。 ∴ $S_{\triangle BPF}$、$S_{\triangle PCE}$、$S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于 $\frac{4}{9}$。

4．本题实际上只要证出 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环小数即可。下面将介绍几个证法。

［证法一］ ∵ k^2、$(k+10)^2$，$(k+20)^2$，…，$(k+90)^2$ 的个位数字都相同，而 10 个相同整数之和的个位数字是 0， ∴ $k^2+(k+10)^2+(k+20)^2+\cdots+(k+90)^2$ 的个位数字是 0。从而

$$a_{n+100}=1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2+\cdots+(n+100)^2 \text{ 的个位数字}$$
$$=(a_n+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+100)^2) \text{ 的个位数字}$$
$$=\{a_n+[(n+1)^2+(n+11)^2+\cdots+(n+91)^2]+[(n+2)^2+(n+12)^2+\cdots+(n+92)^2]$$
$$+\cdots+[(n+10)^2+(n+20)^2+\cdots+(n+100)^2]\} \text{ 的个位数字}=a_n。$$

∴ $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是循环小数。

[证法二] ∵ $(k+10)^2=k^2+20k+100$， ∴ $(k+10)^2$与k^2的个位数字相同。又 ∵ 数列$\{a_n\}$的前10项依次为1，5，4，0，5，1，0，4，5，5。 ∴ 从a_{11}至a_{20}就是把$a_{10}=5$分别加到a_1～a_{10}各项所得数的个位数字。由于$a_{20}=0$， ∴ $a_{21}=a_1=1$，…，$a_{30}=a_{10}=5$，$a_{31}=a_{21}+5$的个位数字，…，$a_{40}=a_{30}+5$的个位数字。依此类推，有$a_{n+20}=a_n$，即$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是循环节长为20的循环小数。

5. [证明] 欲证不等式成立，只要证

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2}-x_1\right)+\left(\frac{x_2^2}{x_3}-x_2\right)+\cdots+\left(\frac{x_n^2}{x_1}-x_n\right)\geqslant 0。$$

亦即

$$\frac{x_1}{x_2}(x_1-x_2)+\frac{x_2}{x_3}(x_2-x_3)+\cdots+\frac{x_n}{x_1}(x_n-x_1)\geqslant 0 \text{ 成立。}$$

∵ 对于任何两个正数a、b都有

$$\frac{a}{b}(a-b)\geqslant a-b。$$

即当$a\geqslant b>0$时，

$$\frac{a}{b}\geqslant 1,\quad a-b\geqslant 0,\qquad \therefore\ \frac{a}{b}(a-b)\geqslant a-b。$$

当$0<a<b$时，

$$\frac{a}{b}<1,\ a-b<0,\qquad \therefore\ \frac{a}{b}(a-b)>a-b。$$

其实对于正数a，b，

$$\frac{a}{b}(a-b)\geqslant a-b \Longleftrightarrow a(a-b)\geqslant b(a-b)\Longleftrightarrow a^2-2ab+b^2\geqslant 0。$$

因此， $\frac{x_1}{x_2}(x_1-x_2)+\frac{x_2}{x_3}(x_2-x_3)+\cdots+\frac{x_n}{x_1}(x_n-x_1)\geqslant(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_1)=0$。

即原不等式成立。

其实有更简捷的证法如下：

∵ 原不等式等价于不等式

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\right)+\left(\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\right)+\cdots+\left(\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\right)\geqslant 2(x_1+x_2+\cdots+x_n)。$$

又 ∵ $\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant 2x_1$，…，$\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant 2x_n$，

∴ 上述不等式左端≥右端。即原不等式成立。

1985年省、市、自治区中学生联合数学竞赛试题

第 一 试

1．选择题(本题满分36分，每一小题答对得6分，答错得0分，不答得1分．)

(1) 假定有两个命题：

甲：a 是大于0的实数；乙：$a>b$ 且 $a^{-1}>b^{-1}$．那么

(A) 甲是乙的充分而不必要条件 (B) 甲是乙的必要而不充分条件 (C) 甲是乙的充分必要条件 (D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件．

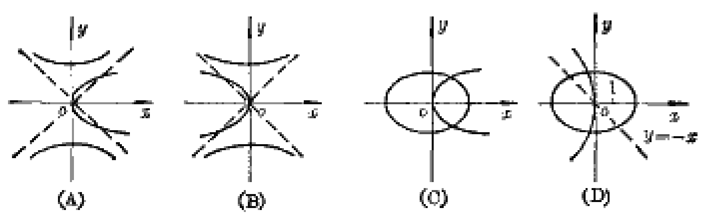
(2) PQ 为经过抛物线 $y^2=2px$ 焦点的任意一条弦，MN 为 PQ 在准线 l 上的射影，PQ 绕 l 旋转一周所得的旋转面面积为 S_1，以 MN 为直径的球面面积为 S_2，则下面的结论中，正确的是

(A) $S_1>S_2$ (B) $S_1<S_2$ (C) $S_1\geqslant S_2$ (D) 有时 $S_1>S_2$，有时 $S_1=S_2$，有时 $S_1<S_2$．

(3) 已知方程 $\arccos\frac{4}{5}-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\arcsin x$，则

(A) $x=\frac{24}{25}$， (B) $x=-\frac{24}{25}$ (C) $x=0$ (D) 这样的 x 不存在．

(4) 在下列四个图形中，已知有一个是方程 $mx+ny^2=0$ 与 $mx^2+ny^2=1(m\neq0, n\neq0)$ 在同一坐标系中的示意图，它应是



(5) 设 Z, W, λ 为复数 $|\lambda|\neq1$，关于 Z 的方程 $\bar{Z}-\lambda Z=W$ 有下面四个结论：

I．$Z=\frac{\bar{\lambda}W+\bar{W}}{1-|\lambda|^2}$ 是这个方程的解；

II．这个方程只有一个解；

III．这个方程有两个解；

IV．这个方程有无穷多解．则

(A) 只有I和II是正确的 (B) 只有I和III是正确的 (C) 只有I和IV是正确的 (D) 以上(A)、(B)、(C)都不正确．

(6) 设 $0<a<1$，若 $x_1=a$，$x_2=a^{x_1}$，$x_3=a^{x_2}$，…，$x_n=a^{x_{n-1}}$，…，则数列 $\{x_n\}$

(A) 是递增的 (B) 是递减的 (C) 奇数项是递增的，偶数项是递减的 (D) 偶数项是递增的，奇数项是递减的．

2. 填空题(本题满分 24 分,每小题 6 分。)

(1) 在 $\triangle ABC$ 中,角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,若角 A、B、C的大小成等比数列,且 $b^2-a^2=ac$,则角 B 的弧度数等于________。

(2) 方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有______组。

(3) 在已知数列 1, 4, 8, 10, 16, 19, 21, 25, 30, 43 中,相邻若干数之和能被 11 整除的数组共有____________。

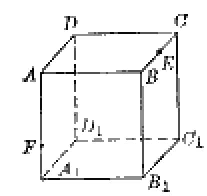
(4) 对任意实数 x, y, 定义运算 $x*y$ 为 $x*y=ax+by+cxy$, 其中 a, b, c 为常数, 等式右端中的运算是通常的实数加法、乘法运算. 现已知 $1*2=3$, $2*3=4$ 并且有一个非零实数 d, 使得对于任意实数 x 都有 $x*d=x$, 则 $d=$________。

第 二 试

(本试共有四题,每题满分 15 分。)

1. 在直角坐标系 xoy 中,点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$的坐标均为一位正整数。OA与 x 轴正方向的夹角大于 45°, OB 与 x 轴正方向的夹角小于 45°, B 在 x 轴上的射影为 B', A 在 y 轴上的射影为 A', $\triangle OB'B$ 的面积比$\triangle OA'A$ 的面积大 33.5。由 x_1, y_1, x_2, y_2 组成的四位数 $\overline{x_1x_2y_2y_1}=x_1\cdot 10^3+x_2\cdot 10^2+y_2\cdot 10+y_1$。试求出所有这样的四位数, 并写出求解过程。

2. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 BC 的中点, F 在 AA_1 上, 且 $A_1F:FA=1:2$。求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角。



3. 某足球邀请赛有十六个城市参加,每市派出甲、乙两个队。根据比赛规则,每两队之间至多赛一场,并且同一城市的两队之间不进行比赛。比赛若干天后进行统计, 发现除 A 市甲队外, 其它各队已比赛过的场数各不相同。问 A 市乙队已赛过多少场?请证明你的结论。

4. 平面上任给五个相异的点, 它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ, 求证: $\lambda\geqslant 2\sin 54°$, 并讨论等号成立的充要条件。

解 答

第 一 试

1. 选择题

(1) [解](B) 因为仅有"甲"是不能使得"乙"成立,因此可知"甲"不是"乙"的充分条件. 接着看"乙"在什么情况下成立, 很明显,当且仅当 $a>0$ 且 $b<0$ 时"乙"才能成立。由此可知, "甲"是"乙"成立的不可缺少的条件,综上所述,得"甲"是"乙"的必要而不充分条件。

(2) [解](C) 在 (A)、(B)、(C)、(D) 四个答案中,(C)包含着(A),即若(A)正确,则 C 必定正确, 因此不必考虑(A)。又当过焦点的弦 PQ 的倾角(与 x 轴夹角)很小时, PQ 绕 l 旋转一周所得旋转体(圆台)的母线很长,而相应的高却很短,亦即球的直径很小,因此(B)不成立。下面,将通过计算判断是(C)或(D)。圆台的侧面积由母线 PQ 和两底半径 PM、QN 的长确定。根据抛物线的定义, $|PM|=|PF|$, $|QN|=|QF|$(其中F为焦点)。若取 PQ 的倾角 α 为参数, 设 $|PF|=\rho_1$, $|QF|=\rho_2$, 则 $|PM|=\rho_1$, $|QN|=\rho_2$, $|PQ|=\rho_1+\rho_2$, 于是 $S_1=\pi(\rho_1+\rho_2)^2$, $S_2=\pi\cdot|MN|^2=\pi\sin^2\alpha(\rho_1+\rho_2)^2$。显然 $S_1\geqslant S_2$, 且当 $\alpha=$

$\frac{\pi}{2}$ 时取到等号。

(3) ［解］(D) ∵ $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$,

$$\therefore \quad 原方程为 2\arccos\frac{4}{5}-\arcsin x=\pi。$$

又 ∵ $\arccos x$ 是减函数，

$$\therefore \quad \arccos\frac{4}{5}<\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}。$$

又 $-\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \quad 2\arccos\frac{4}{5}-\arcsin x<\pi。$$

此式表明没有能满足方程的 x。

(4) ［解］(A) ∵ $mx^2+ny^2=1$，且 $m\cdot n\neq 0$， ∴ m、n 不可能都是负数。若 $m>0,n>0$， ∵ 椭圆的长轴在 x 轴上， ∴ $0<m<n$。这时抛物线 $mx+ny^2=0$，即 $y^2=-\frac{m}{n}x$ 的开口应向左，显然答案不是(C)。又因 $0<m<n$， ∴ $0<\frac{m}{n}<1$，这样，抛物线 $y^2=-\frac{m}{n}x$ 与直线 $y=-x$，当 $-1<x<0$ 时应有交点。由于(D)的图形与此不符，故答案亦非(D)（(D)图中标有单位1）。若m、n 异号，则抛物线 $y^2=-\frac{m}{n}x$的开口应向右， ∴ 答案肯定不是(B)，因此可知，(A)是正确的。例如，取 $n=2$、$m=-2$，即可得到图(A)。

(5) ［解］(A) 由题中给出的四个结论，可知本题需要根据解方程的情况作出选择，于是考虑在方程 $\bar{Z}-\lambda Z=W$ 的两端同取共轭，得 $Z-\bar{\lambda}\bar{Z}=\bar{W}$，以 λ 乘两端，得：$\lambda Z-|\lambda|^2\bar{Z}=\lambda\bar{W}$，与原方程两端分别相加，得：$\bar{Z}(1-|\lambda|^2)=\lambda\bar{W}+W$，两端再取共轭，得 $Z(1-|\lambda|^2)=\bar{\lambda}W+\bar{W}$。

∵ $|\lambda|^2\neq 1$， ∴ $Z=\frac{\bar{\lambda}W+\bar{W}}{1-|\lambda|^2}$。

(6) ［解］(C) 首先考察数列的前三项，$x_1=a$，$x_2=a^a$，$x_3=a^{a^a}$。 ∵ $0<a<1$， ∴ $a<a^a<1$，$a<a^{a^a}<a^a$，即 $x_1<x_3<x_2$，此已表明数列既非递增又非递减，且奇数项也不是递减的。

2．填空题

(1) ［解］ ∵ A、B、C 成等比数列， ∴ 不妨设 $A=\frac{1}{q}B$，$C=qB$。由 $A+B+C=\pi$，可得，$B=\frac{q\pi}{q^2+q+1}$，已知 $b^2-a^2=ac$，又由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$$\therefore \quad ac=c^2-2ac\cos B。$$

$$\because \quad c\neq 0, \quad \therefore \quad a=c-2a\cos B。$$

利用正弦定理，得

$$\sin A=\sin C-2\sin A\cos B,$$

从而

$$\sin A=\sin C-[\sin(A+B)+\sin(A-B)]。$$

$$\therefore \quad \sin A=\sin(B-A)。$$

求得

$$A=\frac{1}{2}B, \quad \therefore \quad q=2,\ B=\frac{2\pi}{7}。$$

(2) ［解］ 显然 x_1 只能取1或0。当 $x_1=1$ 时，原方程有9组解，当 $x_1=0$ 时，原方程的解中含有数字3的有9组，不含3而含有2的有72组，只含有1和0的有 $C_9^3=84$ 组， ∴ 非负整数解总共有174组。

(3) ［解］ 由于是考虑被11整除的问题，故可先把各项减去11的倍数，使数字变小而便于运算，由此可得到如下数列，

$$1,4,-3,-1,5,-3,-1,3,-3,-1,$$

设 S_n 为它的前 n 项和，则 $S_1=1$，$S_2=5$，$S_3=2$，$S_4=1$，$S_5=6$，$S_6=3$，$S_7=2$，$S_8=5$，$S_9=2$，$S_{10}=1$，其中相等的有，

$$S_1=S_4=S_{10}=1,\ S_2=S_8=5,\ S_3=S_7=S_9=2.$$

∴ S_4-S_1; $S_{10}-S_1$, $S_{10}-S_4$, S_8-S_2, S_7-S_3, S_9-S_3, S_9-S_7 共 7 组能被 11 整除。

(4) [解] 因对任一实数 x，有 $x*d=ax+bd+cdx=x$ (其中 $d\neq0$)，∴ $0*d=bd=0$。

∵ $d\neq0$，∴ $b=0$。于是：由

$$\begin{cases}1*2=a+2b+2c=3\\2*3=2a+3b+6c=4\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a+2c=3,\\2a+6c=4.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=5\\c=-1.\end{cases}$$

又由 $1*d=a+bd+cd=1$，∴ 得 $d=4$。

第 二 试

1. [解] 很明显，题设的主要条件是关于面积的一些等量关系。于是由 $S_{\triangle BOB'}=S_{\triangle AOA'}+33.5$，得 $x_2y_2=x_1y_1+67$。∵ $x_1y_1>0$，∴ $x_2y_2>67$。∵ x_2，y_2 为一位正整数，∴ $x_2y_2=72$ 和 81。但 ∵ $\angle BOB'<45°$，即点 B 在直线 $y=x$ 的下方。∴ $x_2>y_2$，故 $x_2y_2\neq81$。

于是 $x_2y_2=72$，∴ $x_2=9$，$y_2=8$。从而 $x_1y_1=5$。

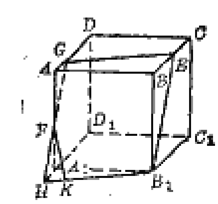
又 ∵ $\angle AOB'>45°$，∴ $x_1<y_1$，由 x_1，y_1 均为一位正整数，推得 $x_1=1$，$y_1=5$。

$$\therefore\quad \overline{x_1x_2y_2y_1}=1985.$$

2. [解] 设两平面 B_1EF 与 AA_1D_1D 的交线为 GFH，其中 G 在 AD 上，H 在 D_1A_1 的延长线上。

∵ 平面 AA_1D_1D ∥ 平面 BB_1C_1C，∴ $FG\parallel B_1E$。

又 $FA\parallel B_1B$，∴ $\angle AFG=\angle BB_1E$。



因此 $\text{tg}\angle AFG=BE:BB_1=\dfrac{1}{2}$。

不妨设正方体的棱长为 6，由 $A_1F:FA=1:2$ 可立得 $A_1F=2$，$FA=4$。

$HA_1=A_1F\cdot\text{tg}\angle HFA_1=1$。

$$HB_1=\sqrt{A_1H^2+A_1B_1^2}=\sqrt{37}$$

作 $A_1K\perp HB_1$(K 为垂足)连接 FK，则 $FK\perp HB_1$，$\angle FKA_1$ 为所求二面角的平面角。

$$\because\quad A_1K=\frac{A_1H\cdot HB_1}{HB_1}=\frac{6}{\sqrt{37}},\quad\therefore\quad \text{tg}\angle FKA_1=\frac{FA_1}{A_1K}=\frac{\sqrt{37}}{3},$$

$$\angle FKA_1=\text{arc ctg}\frac{\sqrt{37}}{3}.$$

注：亦可根据 $\triangle FHB_1$ 与在底平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的射影 $\triangle A_1HB_1$ 的面积关系，求出两面角的平面角 θ 的余弦，即由 $S_{\triangle A_1HB_1}=3$，$S_{\triangle FHB_1}=\sqrt{46}$ 得 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{46}}$，$\theta=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{46}}$，其中 $S_{\triangle FHB_1}=\sqrt{46}$ 是不难求出的。

3. [证] 16 个城市共有 32 队参加比赛，但同一城市的两队之间不比赛，因此每队至多赛 30 场又因除 A 市甲队外的 31 个队比赛的场数是各不相同的，因此这些队比赛的场数分别为 0，1，2，…，30。

设已赛过 K 场的队为 a_K($K=0$，1，…，30)，显然 a_{30} 与 a_0 是同一城市的队，因 a_{30} 队已赛 30 场，即与其他城市的队都已赛过，而只有 a_0 队与 a_{30} 队没有比赛过。同样，a_{29} 与 a_1 是属于同一城市的，因为 a_{29} 除了与 a_0 队以及自己城市的队没赛过以外，与其他城市的队都赛过，而 a_1 队只赛过一次，他是与 a_{30} 队比赛的。依次类推，可知 a_{28} 与 a_2，a_{27} 与 a_3…a_{16} 与 a_{14} 是同一城市的队，这些队都不是 A 城市的乙队，所以 A 城市的乙队只能是 a_{15} 队，他已赛过 15 场。

4. 解题需要工具，需要与其有关的知识。对于平面上任给的五个点，能与哪些知识相联系呢?若平面上任给三点，那么它们或者在一直线上，或者就能构成一个三角形。若平面上任给四点，那么它们或者构成四边形，或者都在一直线上，或者……。现在平面上已任给了五点，它们能作成五边形吗?由此，能根据条件得出 $\lambda\geqslant2\sin54°$ 的结论吗?下面就进行分类讨论，

(1) 若以所给的五点为顶点能组成一个凸五边形，那么，∵ 凸五边形的内角和为 540°，∴ 它的

最大内角不小于108°，设其为A，又设B、C为其相邻两旁的顶点，且$\angle ACB\leqslant\angle ABC$。则在$\triangle ABC$中$\frac{1}{2}\angle A+\angle C\leqslant 90°$， ∴ $\angle C\leqslant 90°-\frac{1}{2}\angle A$。 ∵ 锐角的正弦函数是增函数，

$$\therefore \sin C\leqslant\sin\left(90°-\frac{1}{2}\angle A\right)=\cos\left(\frac{1}{2}A\right).$$

根据正弦定理，

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}\geqslant\frac{\sin A}{\cos\left(\frac{1}{2}A\right)}=2\sin\frac{A}{2}\geqslant 2\sin 54°.$$

设此五点中，两点间的最大、最小距离分别为p，q，则$p\geqslant a$，$q\leqslant c$。因此有

$$\lambda=\frac{p}{q}\geqslant\frac{a}{c}\geqslant 2\sin 54°.$$

(2) 若所给五点不能组成凸五边形，则有以下两种情况：

i) 五点中有三点共线，设此三点为A，B，C，且B在A，C之间，则

$$\frac{|AC|}{\min(|AB|,|BC|)}\geqslant 2>2\cdot\sin 54°.$$

ii) 五点中无三点共线，而其中有一点在其它三点组成的三角形内部。设点P在$\triangle ABC$内部，则$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$中至少有一个不小于120°，依(1)的证法，得$\lambda\geqslant 2\sin 60°>2\sin 54°$。此时命题仍然成立。

现在讨论成立等式$\lambda=2\sin 54°$的充要条件。由于在(2)中不可能出现$\lambda=2\sin 54°$的情况，因此等式成立的充要条件只能在(1)中得到。在(1)的证明过程中，若成立等式$\lambda=2\cdot\sin 54°$，即成立

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}}=2\sin\frac{A}{2}=2\sin 54°,$$

则$\angle A=108°$，$\angle B=\angle C$，即$\triangle ABC$为顶角等于108°的等腰三角形，而且对于凸五边形的每个顶角（内角）都适用，因此，它是正五边形，这时$p=a$，$q=c$。

反之，若五点组成正五边形，则显然成立：

$$\lambda=2\sin 54°.$$

∴ 成立等号的充要条件是所给五点组成一个正五边形。

1986年省、市、自治区中学生联合数学竞赛试题

第 一 试

1. 选择题(本题满分42分．每个小题7分，每个小题答对得7分，答错得0分，不答记1分．)

(1) 设$-1<a<0$，$\theta=\arcsin a$，那么不等式$\sin x<a$的解集为

(A) $\{x|2n\pi+\theta<x<(2n+1)\pi-\theta, n\in Z\}$

(B) $\{x|2n\pi-\theta<x<(2n+1)\pi+\theta, n\in Z\}$

(C) $\{x|(2n-1)\pi+\theta<x<2n\pi-\theta, n\in Z\}$

(D) $\{x|(2n-1)\pi-\theta<x<2n\pi+\theta, n\in Z\}$．

(2) 设z为复数，$M=\{z|(z-1)^2=|z-1|^2\}$，那么

(A) $M=$\{纯虚数\}　　(B) $M=$\{实数\}

(C) \{实数\}$\subset M\subset$\{复数\}　　(D) $M=$\{复数\}．

(3) 设实数a、b、c满足

$$\begin{cases} a^2-bc-8a+7=0, \\ b^2+c^2+bc-6a+6=0. \end{cases}$$

那么a的取值范围是

(A) $(-\infty, +\infty)$　　(B) $(-\infty, 1]\cup[9, +\infty)$

(C) $(0, 7)$　　(D) $[1, 9]$．

(4) 如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，那么其长度不等的棱的条数最少为

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6．

(5) 平面上有一个点集M和七个不同的圆$C_1, C_2, \cdots, C_7$，其中圆C_7恰好经过M中的7个点，圆C_6恰好经过M中的6个点，…，圆C_1恰好经过M中的1个点，那么M中的点数最少为

(A) 11　(B) 12　(C) 21　(D) 28．

(6) 边长为a、b、c的三角形，其面积等于$\frac{1}{4}$，而外接圆半径为1．若

$$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}, \qquad t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

则s与t的大小关系是

(A) $s>t$　　(B) $s=t$

(C) $s<t$　　(D) 不确定．

2. 填空题(本题满分28分，每个小题7分．)

本题共有4个小题．每个小题的答案都是000—999的某一个整数，请把你认为正确的答案填在______上．

(1) 在底面半径为6的圆柱内，有两个半径也为6的球面，其球心距为13．若作一平

面与这二球面相切，且与圆柱面相交成一椭圆，则这个椭圆的长轴长与短轴长之和是______。

(2) 已知 $f(x)=|1-2x|$，$x\in[0,1]$，那么方程

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$$

的解的个数是______。

(3) 设 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，那么和式

$$f\left(\frac{1}{1001}\right)+f\left(\frac{2}{1001}\right)+f\left(\frac{3}{1001}\right)+\cdots+f\left(\frac{1000}{1001}\right)$$

的值等于______。

(4) 设 x, y, z 为非负实数，且满足方程

$$4^{\sqrt{5x+9y+4z}}-68\times2^{\sqrt{5x+9y+4z}}+256=0,$$

那么 $x+y+z$ 的最大值与最小值的乘积等于______。

第 二 试

1．(本题满分 17 分)已知实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i, \qquad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

求证：对于任何自然数 n，

$$P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$$

是 x 的一次多项式。

2．(本题满分 17 分)已知锐角三角形 ABC 的外接圆半径是 R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上。求证：AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高的充要条件是

$$S=\frac{R}{2}(EF+FD+DE),$$

式中 S 是三角形 ABC 的面积。

3．(本题满分 16 分)平面直角坐标系中，纵、横坐标都是整数的点称为整点。请设计一种方法将所有的整点染色，每一个整点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，使得

(1) 每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；

(2) 对任意白点 A、红点 B 和黑点 C，总可以找到一个红点 D，使得 $ABCD$ 为一平行四边形。

证明你设计的方法符合上述要求。

解 答

第 一 试

1．选择题

(1) [解](D) ∵ $-1<a<0$， ∴ $\theta=\arcsin a\in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$，先求出在区间 $(-\pi, 0)$ 中，满足方程 $\sin x=a$ 的角：

$$x=-\pi-\arcsin a \text{ 和 } x=\arcsin a,$$

从单位圆中,容易看出: 不等式 $\sin x<a$ 的解集为(D).

(2) [解](B) $\because$ $(Z-1)^2=|Z-1|^2$, 即 $(Z-1)^2=(Z-1)(\overline{Z}-1)$.

$\therefore$ $(Z-1)(Z-\overline{Z})=0$. 因此, $Z=1$ 或 $Z=\overline{Z}$.

即 Z 为实数,答案为(B).

(3) [解](D) 由 $\begin{cases} a^2-bc-8a+7=0, \\ b^2+c^2+bc-6a+6=0. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} bc=a^2-8a+7, \\ b^2+c^2+bc=6a-6. \end{cases}$

$\therefore$ $b^2+c^2-2bc=-3(a^2-10a+9)$, 即 $(b-c)^2=-3(a-1)(a-9)\geqslant 0$.

$\therefore$ $1\leqslant a\leqslant 9$. 答案为(D).

(4) [解](A) 因四面体每个面都不是等腰三角形,故至少有三条棱的长度互不相等。而且有三条棱长度互不相等,就能实现四面体每个面都不是等腰三角形,只要每两条对棱都相等即可,答案为(A).

(5) [解](B) 要使 M 中的点的个数最少,各圆要尽可能多地共同经过 M 中的点。因为不相同的两圆最多只有两个公共点。由于 C_7 经过 M 中的 7 个点,所以 C_6 至少要经过 M 中的另外 4 个点, 而 C_5 除了和 C_7、C_6 各有两个公共点外,还要经过 M 中的一个点,故 M 中至少要有 12 个点,且有 12 个点,就能满足要求:

先作两两相交的三个圆,记为 C_7、C_6、C_5。再作圆 C_4 与两圆 C_6、C_7 都相交于另外的点 (但与 C_5 不相交)。又过 C_5 与 C_7 的一个交点, 作圆 C_3 使与 C_5 及 C_7 各交一个新的点,将所有的交点都算作 M 中的点,此时 M 中的点为 12 个。C_7 与 C_6、C_5、C_4 各有两个交点,又与 C_3 有一个新交点, 共 7 个点; C_6 与 C_7、C_5、C_4 各有两个交点,共 6 个点; C_5 与 C_7、C_6 各有两个交点,且与 C_3 有一个新交点, 共 5 个点; C_4 与 C_7、C_6 各有两个交点,共 4 个点; C_3 是过 C_7 与 C_5 的一个交点,且与其各交得一个新点,共有 3 个点. 最后在 M 的 12 个点中,选取两个点、一个点分别作满足要求的圆 C_2、C_1 是容易的事。故答案为(B).

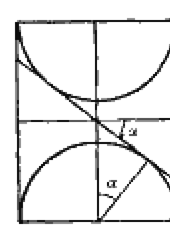
(6) [解](C) $\because$ $c=2R\sin C=2\sin C$, 又 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}$,

$\therefore$ $abc=1$, 于是

$$t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=ab+bc+ca$$
$$=(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{bc})^2+(\sqrt{ca})^2\geqslant\sqrt{ab^2c}+\sqrt{abc^2}+\sqrt{a^2bc}$$
$$=\sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=s,$$

且其中取不到等号,否则 $a=b=c=R=1$ 是不可能的,故答案为(C).

2. 填空题



(1) 过平面与球面的切点,作圆柱的轴截面(如图)。显然,椭圆的短轴为圆柱的直径,即 $2b=12$.

又 $\cos\alpha=6:\frac{13}{2}=\frac{12}{13}$, $\therefore$ $a=\frac{6}{\cos\alpha}=\frac{13}{2}$.

$\therefore$ $2a=13$, $2a+2b=25$.

(2) $\because$ $f(x)=|1-2x|$, $x\in[0,1]$,

$\therefore$ $f(f(x))=|1-2f(x)|=|1-2|1-2x||$

$$=\begin{cases} |4x-1|=\begin{cases} 1-4x\left(0\leqslant x<\frac{1}{4}\right), \\ 4x-1\left(\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{1}{2}\right), \end{cases} \\ |3-4x|=\begin{cases} 3-4x\left(\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{3}{4}\right), \\ 4x-3\left(\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1\right). \end{cases} \end{cases}$$

同理, $f(f(f(x)))=|1-2f(f(x))|$ 分段表示为 8 个线段, 即函数 $f(f(f(x)))$ 的图象为由 8 个线段组

成的折线，这些线段的斜率为 -8 或 8，顶点分别在 x 轴和直线 $y=1$ 上。

∴ 方程 $f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$ 有 8 个解。

(3) 由 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，得

$$f\left(\frac{k}{1001}\right)+f\left(\frac{1001-k}{1001}\right)=\frac{4^{\frac{k}{1001}}}{4^{\frac{k}{1001}}+2}+\frac{4^{\frac{1001-k}{1001}}}{4^{\frac{1001-k}{1001}}+2}=1,$$

$$\therefore\quad f\left(\frac{1}{1001}\right)+f\left(\frac{2}{1001}\right)+\cdots+f\left(\frac{1000}{1001}\right)=500.$$

(4) 由方程

$$4^{\sqrt{5x+9y+4z}}-68\times 2^{\sqrt{5x+9y+4z}}+256=0$$

解得 $\sqrt{5x+9y+4z}=2\cdots\cdots(1)$； $\sqrt{5x+9y+4z}=6\cdots\cdots(2)$。

即 $5x+9y+4z=4\cdots\cdots(1')$； $5x+9y+4z=36\cdots\cdots(2')$。

由(1′)得 $x+y+z=\frac{1}{9}(4+4x+5z)\geqslant\frac{4}{9}$，且当 $x=0,\ y=\frac{4}{9},\ z=0$ 时取到等号。

由(2′)得 $x+y+z=\frac{1}{4}(36-x-5y)\leqslant 9$，且当 $x=0,\ y=0,\ z=9$ 时，取到等号。

$$\therefore\quad (x+y+z)_{max}+(x+y+z)_{min}=4.$$

第 二 试

1. 显然 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 为等差数列，

$$\therefore\quad a_k=a_1+(k-1)(a_1-a_0)=k(a_1-a_0)+a_0.$$

设 $P(x)$ 中第 $k+1$ 项为 T_{k+1}，则

$$T_{k+1}=a_kC_n^kx^k(1-x)^{n-k}=a_0C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+(a_1-a_0)kC_n^k(1-x)^{n-k}.$$

又因为 $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，于是

$$kC_n^kx^k(1-x)^{n-k}=nC_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=nxC_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

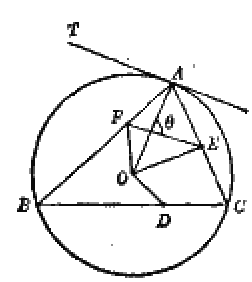
$$\therefore\quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}T_{k+1}=\sum_{k=0}^{n}a_0C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}nx(a_1-a_0)C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=a_0(1-x+x)^n+n(a_1-a_0)x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=a_0+(a_1-a_0)x.$$

所以当等差数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 公差不为零时，$P(x)$ 为 x 的一次多项式。若公差为零，即 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 为常数列，则 $P(x)$ 为零次多项式或零多项式。

2. 如图，由关系



$$S_{\triangle ABC}=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)=\frac{R}{2}EF+\frac{R}{2}FD+\frac{R}{2}DE,$$

不难看出，可从 $S_{\triangle ABC}=S_{四边形OEAF}+S_{四边形OFBD}+S_{四边形ODCE}$ 着手考虑。

∵ $S_{四边形OEAF}=\frac{1}{2}OA\cdot EF\sin\theta$，从而应有 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $EF\perp OA$，联想到圆 O 在顶点 A 处的切线垂直于半径 OA，循此可得证明。

必要性：因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以外接圆圆心 O 在形内。

于是 $S_{\triangle ABC}=S_{四边形OEAF}+S_{四边形OFBD}+S_{四边形ODCE}$。

又∵ $D、E、F$ 为垂足， ∴ $E、F、B、C$ 四点共圆，且 $\angle AFE=\angle ACB$。

作圆 O 在点 A 处的切线 AT（如图），则 $\angle TAB=\angle ACB$， ∴ $\angle AFE=\angle FAB$，即 $EF\parallel AT$，因此 $EF\perp OA$。同理 $FD\perp OB$，$DE\perp OC$， ∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$。

充分性：由 $S_{\triangle ABC}=\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$ 知 $EF\perp OA$, $FD\perp OB$, $DE\perp OC$。否则 $S_{\triangle ABC}<\frac{R}{2}(EF+FD+DE)$，与假设矛盾，于是 $\angle AFE=\angle TAB$。 $\because$ $\angle ACB=\angle TAB$， $\therefore$ $\angle AFE=\angle ACB$，因此四点 E、F、B、C 共圆。同理，四点 F、D、C、A 和四点 D、E、A、B 也分别共圆。

$\because$ F、D、C、A 四点共圆， $\therefore$ $\angle AFC=\angle ADC$。

$\because$ D、E、A、B 四点共圆， $\therefore$ $\angle AEB=\angle ADB$。

$\therefore$ $\angle AFC+\angle AEB=\angle ADC+\angle ADB=\pi$。

$\because$ E、F、B、C 四点共圆， $\therefore$ $\angle BEC=\angle BFC=\frac{\pi}{2}$，即 E、F 为垂足，同理，D 亦为垂足。

3．考虑整数问题，奇偶性是一个有用的工具。

在平行四边形四个顶点 A、B、C、D 中，红点两个，黑白点各一个，因此在染色时，红点要多，黑白点应对等。不妨取出这样一个平行四边形，它的四个顶点为：

(1, 0)、(1, 1)、(0, 1)、(0, 0)。如何染色呢？依奇偶性可以考虑：

(奇，奇)染白色，(偶，偶)染黑色，(奇，偶)和(偶，奇)都染红色。

这样，第一小题，显然满足，而且三种颜色不在一直线上(也可认为，可以允许三色共线，若三色 A、B、C 共线，则四边形 $ABCD$ 作为"退化的"看待)。因对任意的白点 $A(x_1, y_1)$、红点 $B(x_2, y_2)$、黑点 $C(x_3, y_3)$，若三色共线，则

$$(y_2-y_1)(x_3-x_1)=(y_3-y_1)(x_2-x_1),$$

但此是不可能的。 $\because$ (x_3-x_1)与(y_3-y_1)都是奇数，而(y_2-y_1)与(x_2-x_1)是一奇一偶的，等式两边一奇一偶不能成立。

又设 $D(x_4, y_4)$。若 $ABCD$ 为平行四边形，则 AC 中点为 $\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$，$BD$ 中点为 $\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$，两中点重合，从而 $x_4=x_1+x_3-x_2$，$y_4=y_1+y_3-y_2$。

显然，x_4，y_4 都是整数，且因(x_1+x_3)与(y_1+y_3)都是奇数，而 x_2、y_2 为一奇一偶，故 x_4、y_4 为一奇一偶，$D(x_4, y_4)$为红点。

其实，染色时黑白的点应尽量少染，让红点尽可能地多，使情况简单易于配上红点，例如可使 y 轴上半轴的整点(包括原点)都染白色；y 轴下半轴的整点(不包括原点)都染黑色，此外的一切整点都染红色，则条件全部得到满足，是一目了然的。